Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике для 11 класса, 2021-2022 учебный год.

1.1. *1 сентября 2021 года Вася положил в банк 100 000 рублей. Ровно через год банк начисляет 10% годовых (то есть увеличивает сумму на 10 процентов от того, что было в текущий момент на счете, например, 2 сентября 2022 года у Васи на счете будет 110 000 рублей). Найдите наименьший номер года, в котором 2 сентября сумма на счете Васи будет больше, чем 150 100 рублей.*

Ответ: 2026

Решение. Заметим, что 2 сентября $(2021+n)$-го года на счету будет $100000 \cdot 1,1^n$ рублей. Так как $100000 \cdot 1,1^4 = 146410 < 150100 < 161051 = 100000 \cdot 1,1^5$, минимальное n, для которого сумма будет больше чем 150 100 рублей, равно 5. Таким образом, ответ: $2021 + 5 = 2026$.

1.2. *1 сентября 2016 года Вася положил в банк 200 000 рублей. Ровно через год банк начисляет 10% годовых (то есть увеличивает сумму на 10 процентов от того, что было в текущий момент на счете, например, 2 сентября 2017 года у Васи на счете будет 220 000 рублей). Найдите наименьший номер года, в котором 2 сентября сумма на счете Васи будет больше, чем 300 000 рублей.*

Ответ: 2021

1.3. *1 марта 2020 года Вася положил в банк 100 000 рублей. Ровно через год банк начисляет 10% годовых (то есть увеличивает сумму на 10 процентов от того, что было в текущий момент на счете, например, 2 марта 2021 года у Васи на счете будет 110 000 рублей). Найдите наименьший номер года, в котором 2 марта сумма на счете Васи будет больше, чем 150 800 рублей.*

Ответ: 2025

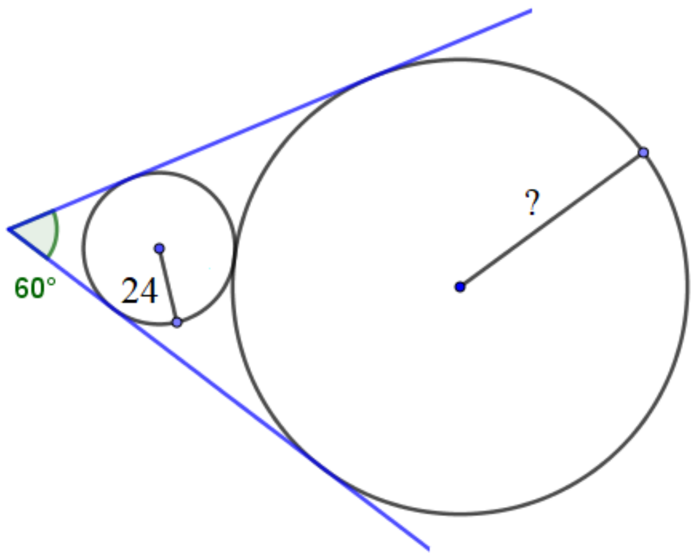
1.4. *1 марта 2018 года Вася положил в банк 200 000 рублей. Ровно через год банк начисляет 10% годовых (то есть увеличивает сумму на 10 процентов от того, что было в текущий момент на счете, например, 2 марта 2019 года у Васи на счете будет 220 000 рублей). Найдите наименьший номер года, в котором 2 марта сумма на счете Васи будет больше, чем 301 000 рублей.*

Ответ: 2023

1.5. *1 октября 2019 года Вася положил в банк 200 000 рублей. Ровно через год банк начисляет 10% годовых (то есть увеличивает сумму на 10 процентов от того, что было в текущий момент на счете, например, 2 октября 2020 года у Васи на счете будет 220 000 рублей). Найдите наименьший номер года, в котором 2 октября сумма на счете Васи будет больше, чем 302 000 рублей.*

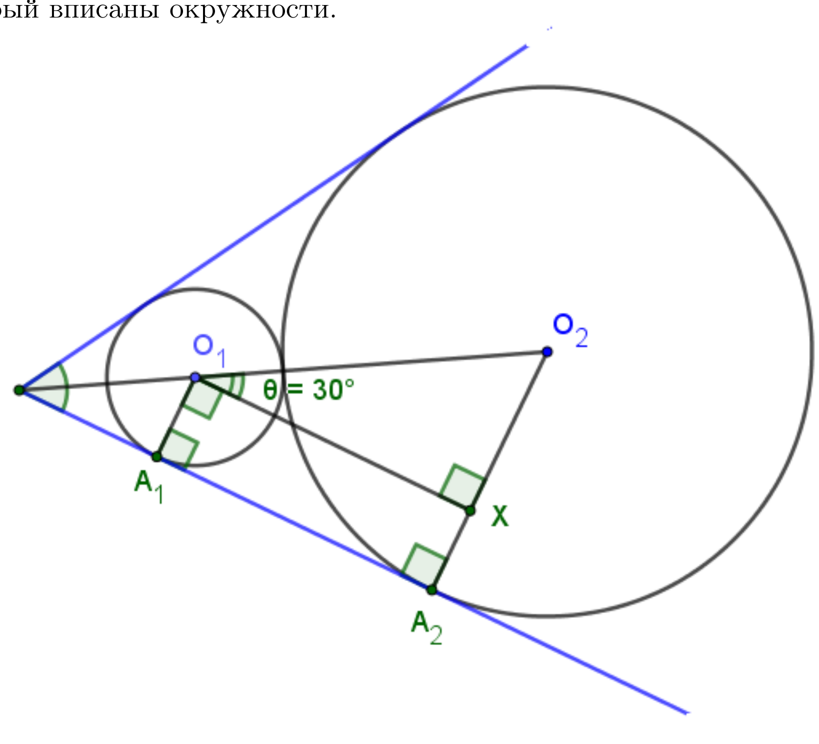
Ответ: 2024

2.1. *В угол величиной 60 градусов вписаны две окружности, которые касаются друг друга. Радиус меньшей окружности равен 24. Чему равен радиус большей окружности?*



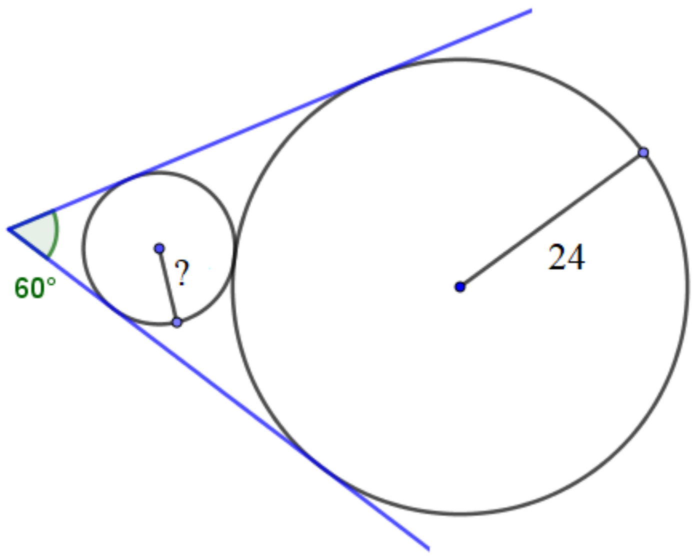
Ответ: 72

Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, $R_1 = 24$ и $R_2 > R_1$ — их радиусы а A_1 и A_2 — точки касания с одной из сторон угла. Тогда $A_1O_1O_2A_2$ — прямоугольная трапеция. Угол между O_1O_2 и A_1A_2 равен половине величины угла, в который вписаны окружности.



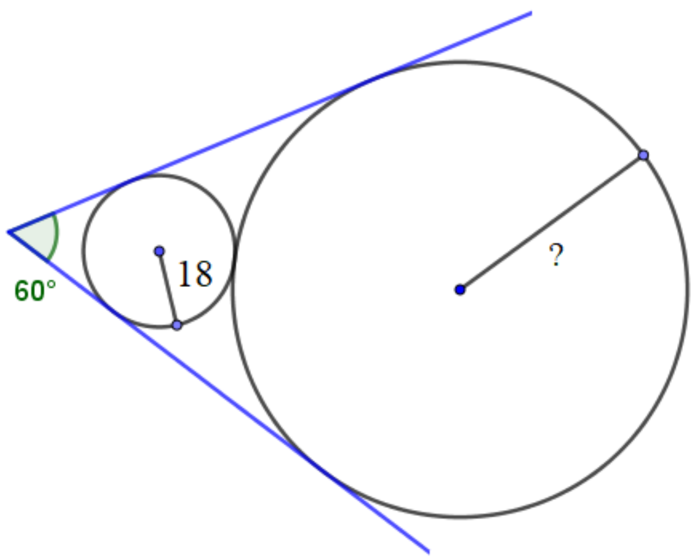
Пусть X — проекция O_1 на O_2A_2. Тогда O_1O_2X — прямоугольный треугольник с прямым углом X и углом XO_1O_2, равным 30°, при этом $O_1O_2 = R_1 + R_2$, $O_2X = R_2 - R_1$. Тогда $\frac{R_2-R_1}{R_2+R_1} = \sin 30^\circ = 1/2$. Имеем $2(R_2 - R_1) = R_2 + R_1$, $R_2 = 3R_1$.

2.2. *В угол величиной 60 градусов вписаны две окружности, которые касаются друг друга. Радиус большей окружности равен 24. Чему равен радиус меньшей окружности?*



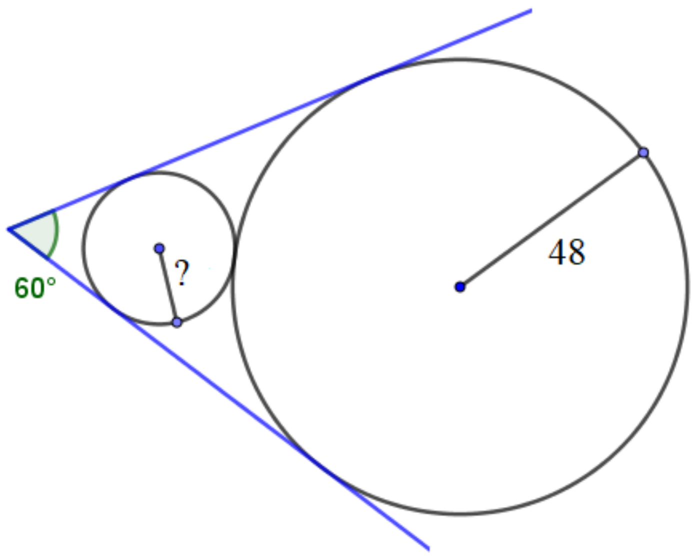
Ответ: 8

2.3. *В угол величиной 60 градусов вписаны две окружности, которые касаются друг друга. Радиус меньшей окружности равен 18. Чему равен радиус большей окружности?*



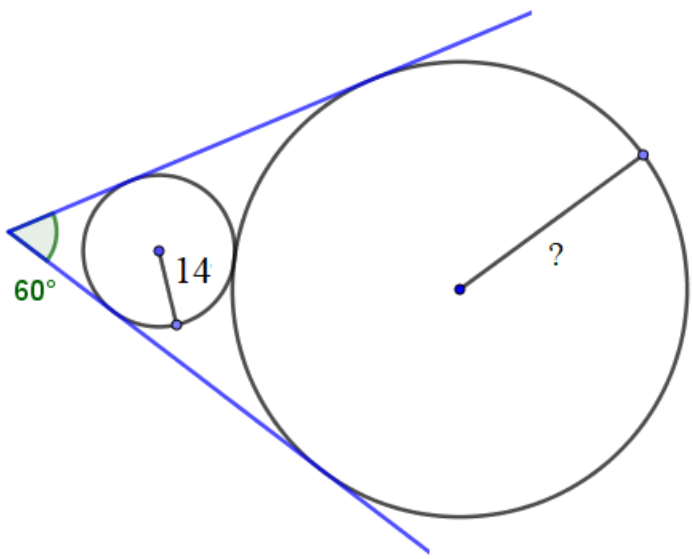
Ответ: 54

2.4. *В угол величиной 60 градусов вписаны две окружности, которые касаются друг друга. Радиус большей окружности равен 48. Чему равен радиус меньшей окружности?*



Ответ: 16

2.5. *В угол величиной 60 градусов вписаны две окружности, которые касаются друг друга. Радиус меньшей окружности равен 14. Чему равен радиус большей окружности?*



Ответ: 42

3.1. *Семён решал квадратное уравнение* $4x^2 + bx + c = 0$ *и обнаружил, что два его корня – это числа* $tg\,\alpha$ *и* $3ctg\,\alpha$ *при некотором* α. *Найдите* c.

Ответ: 12

Решение. По теореме Виета $c/4$ равно произведению корней. Учитывая, что $tg\,\alpha \cdot ctg\,\alpha = 1$, получаем $c/4 = 3$.

3.2. *Семён решал квадратное уравнение* $4x^2 + bx + c = 0$ *и обнаружил, что два его корня – это числа* $tg\,\alpha$ *и* $4ctg\,\alpha$ *при некотором* α. *Найдите* c.

Ответ: 16

3.3. *Семён решал квадратное уравнение* $3x^2 + bx + c = 0$ *и обнаружил, что два его корня – это числа* $tg\,\alpha$ *и* $3ctg\,\alpha$ *при некотором* α. *Найдите* c.

Ответ: 9

3.4. *Семён решал квадратное уравнение* $3x^2 + bx + c = 0$ *и обнаружил, что два его корня – это числа* $2tg\,\alpha$ *и* $3ctg\,\alpha$ *при некотором* α. *Найдите* c.

Ответ: 18

3.5. *Семён решал квадратное уравнение* $4x^2 + bx + c = 0$ *и обнаружил, что два его корня – это числа* $3tg\,\alpha$ *и* $2ctg\,\alpha$ *при некотором* α. *Найдите* c.

Ответ: 24

4.1. *Дана арифметическая прогрессия* $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{100}$. *Известно, что* $a_3 = 9{,}5$, *а разность прогрессии* $d = 0{,}6$. *Найдите сумму* $\{a_1\} + \{a_2\} + \ldots + \{a_{100}\}$. *Через* $\{x\}$ *обозначена дробная часть числа* x, *т.е. разность между* x *и наибольшим целым числом, не превосходящим* x, *например:* $\{4{,}7\} = 0{,}7$, $\left\{-5\dfrac{1}{3}\right\} = \dfrac{2}{3}$ *и т.д.*

Ответ: 50

Решение. Посмотрим на первые цифры после запятой в десятичной записи членов прогрессии. Так как $d = 0{,}6$ и $a_3 = 9{,}5$, последовательность этих цифр такова: $3, 9, 5, 1, 7, 3, 9, 5, 1, 7, \ldots$. Она периодична с периодом 5. Тогда сумма дробных частей каждых пяти последовательных членов в прогрессии равна $0{,}3 + 0{,}9 + 0{,}5 + 0{,}1 + 0{,}7 = 2{,}5$. Итого, искомая сумма дробных частей равна $20 \cdot 2{,}5 = 50$.

4.2. *Дана арифметическая прогрессия* $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{120}$. *Известно, что* $a_2 = 9{,}8$, *а разность прогрессии* $d = 0{,}6$. *Найдите сумму* $\{a_1\} + \{a_2\} + \ldots + \{a_{120}\}$. *Через* $\{x\}$ *обозначена дробная часть числа* x, *т.е. разность между* x *и наибольшим целым числом, не превосходящим* x, *например:* $\{4{,}7\} = 0{,}7$, $\left\{-5\dfrac{1}{3}\right\} = \dfrac{2}{3}$ *и т.д.*

Ответ: 48

4.3. *Дана арифметическая прогрессия* $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{80}$. *Известно, что* $a_3 = 9{,}8$, *а разность прогрессии* $d = 0{,}6$. *Найдите сумму* $\{a_1\} + \{a_2\} + \ldots + \{a_{80}\}$. *Через* $\{x\}$ *обозначена дробная часть числа* x, *т.е. разность между* x *и наибольшим целым числом, не превосходящим* x, *например:* $\{4{,}7\} = 0{,}7$, $\left\{-5\dfrac{1}{3}\right\} = \dfrac{2}{3}$ *и т.д.*

Ответ: 32

4.4. *Дана арифметическая прогрессия* $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{100}$. *Известно, что* $a_3 = 9{,}8$, *а разность прогрессии* $d = 0{,}4$. *Найдите сумму* $\{a_1\} + \{a_2\} + \ldots + \{a_{100}\}$. *Через* $\{x\}$ *обозначена дробная часть числа* x, *т.е. разность между* x *и наибольшим целым числом, не превосходящим* x, *например:* $\{4{,}7\} = 0{,}7$, $\left\{-5\dfrac{1}{3}\right\} = \dfrac{2}{3}$ *и т.д.*

Ответ: 40

4.5. *Дана арифметическая прогрессия* $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{120}$. *Известно, что* $a_2 = 9{,}5$, *а разность прогрессии* $d = 0{,}4$. *Найдите сумму* $\{a_1\} + \{a_2\} + \ldots + \{a_{120}\}$. *Через* $\{x\}$ *обозначена дробная часть числа* x, *т.е. разность между* x *и наибольшим целым числом, не превосходящим* x, *например:* $\{4{,}7\} = 0{,}7$, $\left\{-5\dfrac{1}{3}\right\} = \dfrac{2}{3}$ *и т.д.*

Ответ: 60

5.1. *Датчик случайных чисел выдает число a — одно из натуральных чисел $1, 2, \ldots, 100$ (с равной вероятностью). Для этого значения a находим максимально возможное значение M функции*

$$f(x) = \frac{700}{x^2 - 2x + 2a}.$$

Вероятность того, что $M > 10$, равна n процентов. Чему равно n?

Ответ: 35

Решение. Минимальное значение квадратного трехчлена $x^2 - 2x + 2a$ равно $2a - 1$. Поскольку для рассматриваемых значений a выполнено $2a - 1 > 0$ (это верно при $a > 1/2$), максимальное значение $f(x)$ равно $M = \frac{700}{2a-1}$. Далее, условие $M > 10$ (при $2a - 1 > 0$) равносильно следующим условиям: $700 > 10(2a - 1) \Leftrightarrow 71 > 2a$. Из натуральных $a = 1, 2, \ldots, 100$ последнему неравенству удовлетворяют 35 первых значений.

5.2. *Датчик случайных чисел выдает число a — одно из натуральных чисел $1, 2, \ldots, 100$ (с равной вероятностью). Для этого значения a находим максимально возможное значение M функции*

$$f(x) = \frac{900}{x^2 - 2x + 3a}.$$

Вероятность того, что $M > 10$, равна n процентов. Чему равно n?

Ответ: 30

5.3. *Датчик случайных чисел выдает число a — одно из натуральных чисел $1, 2, \ldots, 100$ (с равной вероятностью). Для этого значения a находим максимально возможное значение M функции*

$$f(x) = \frac{800}{x^2 - 2x + 2a}$$

. Вероятность того, что $M < 20$, равна n процентов. Чему равно n?

Ответ: 80

5.4. *Датчик случайных чисел выдает число a — одно из натуральных чисел $1, 2, \ldots, 100$ (с равной вероятностью). Для этого значения a находим максимально возможное значение M функции*

$$f(x) = \frac{600}{x^2 - 2x + 4a}$$

. Вероятность того, что $M < 5$, равна n процентов. Чему равно n?

Ответ: 70

5.5. *Датчик случайных чисел выдает число a — одно из натуральных чисел $1, 2, \ldots, 100$ (с равной вероятностью). Для этого значения a находим максимально возможное значение M функции*

$$f(x) = \frac{550}{x^2 - 2x + 3a}.$$

Вероятность того, что $M > 10$, равна n процентов. Чему равно n?

Ответ: 18

6.1. *В ряд записали числа:* 100^{100}, 101^{101}, 102^{102}, ..., 876^{876} *(т.е. выписали числа вида* n^n *для натуральных* n *от 100 до 876.) Сколько среди выписанных чисел точных кубов? (Точным кубом называют куб целого числа.)*

Ответ: 262

Решение. Рассмотрим число вида m^k, где m и k — натуральные числа. Если k делится на 3, то m^k — точный куб. Иначе m^k является точным кубом тогда и только тогда, когда m является точным кубом. Таким образом, ответ в нашей задаче — суммарное количество чисел, делящихся на 3, и не делящихся на 3 точных кубов в множестве чисел $\{100, 101, 102, \ldots, 876\}$. Нужных делящихся на 3 чисел $(876-99)/3 = 259$. Нужных точных кубов — ровно 3: $5^3, 7^3, 8^3$. Итого $259 + 3 = 262$ искомых чисел.

6.2. *В ряд записали числа:* 121^{121}, 122^{122}, 123^{123}, ..., 900^{900} *(т.е. выписали числа вида* n^n *для натуральных* n *от 121 до 900.) Сколько среди выписанных чисел точных кубов? (Точным кубом называют куб целого числа.)*

Ответ: 263

6.3. *В ряд записали числа:* 105^{105}, 106^{106}, 107^{107}, ..., 848^{848} *(т.е. выписали числа вида* n^n *для натуральных* n *от 105 до 848.) Сколько среди выписанных чисел точных кубов? (Точным кубом называют куб целого числа.)*

Ответ: 251

6.4. *В ряд записали числа:* 115^{115}, 116^{116}, 117^{117}, ..., 879^{879} *(т.е. выписали числа вида* n^n *для натуральных* n *от 115 до 879.) Сколько среди выписанных чисел точных кубов? (Точным кубом называют куб целого числа.)*

Ответ: 258

6.5. *В ряд записали числа:* 111^{111}, 112^{112}, 113^{113}, ..., 905^{905} *(т.е. выписали числа вида* n^n *для натуральных* n *от 111 до 905.) Сколько среди выписанных чисел точных кубов? (Точным кубом называют куб целого числа.)*

Ответ: 268

7.1. *В треугольной пирамиде $ABCD$ известно: $AB = CD = 6$, $AD = BC = 10$, $\angle ABC = 120^\circ$. Найдите R^2, где R – радиус наименьшего шара, в который можно поместить такую пирамиду.*

Ответ: 49

Решение. Так как отрезок AC помещается в шар, то $2R \geqslant AC$. С другой стороны, шар, построенный на AC как на диаметре, покрывает как треугольник ABC, поскольку $\angle ABC > 90^\circ$, так и равный ему (по трем сторонам) треугольник BAD, и следовательно, покрывает весь тетраэдр. Таким образом, искомое значение R равно $AC/2$, и $R^2 = AC^2/4$.

Далее, по теореме косинусов имеем $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 120^\circ = 6^2 + 10^2 + 2 \cdot 6 \cdot 10/2 = 4(3^2 + 5^2 + 3 \cdot 5) = 4 \cdot 49$.

7.2. *В треугольной пирамиде $ABCD$ известно: $AB = CD = 10$, $AD = BC = 4$, $\angle ABC = 120^\circ$. Найдите R^2, где R – радиус наименьшего шара, в который можно поместить такую пирамиду.*

Ответ: 39

7.3. *В треугольной пирамиде $ABCD$ известно: $AB = CD = 4$, $AD = BC = 8$, $\angle ABC = 120^\circ$. Найдите R^2, где R – радиус наименьшего шара, в который можно поместить такую пирамиду.*

Ответ: 28

7.4. *В треугольной пирамиде $ABCD$ известно: $AB = CD = 12$, $AD = BC = 4$, $\angle ABC = 120^\circ$. Найдите R^2, где R – радиус наименьшего шара, в который можно поместить такую пирамиду.*

Ответ: 52

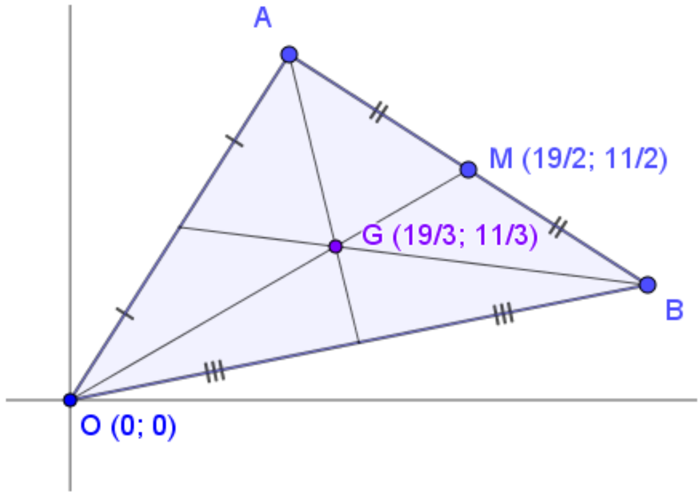
7.5. *В треугольной пирамиде $ABCD$ известно: $AB = CD = 8$, $AD = BC = 10$, $\angle ABC = 120^\circ$. Найдите R^2, где R – радиус наименьшего шара, в который можно поместить такую пирамиду.*

Ответ: 61

8.1. *На координатной плоскости рисуют треугольник OAB, у которого точка пересечения медиан находится в точке $\left(\frac{19}{3}, \frac{11}{3}\right)$, а точки A и B имеют натуральные координаты. Найдите количество таких треугольников. (Здесь через O обозначено начало координат – точка $(0,0)$; два треугольника с одинаковым набором вершин считаются одинаковыми, т.е. OAB и OBA считаем одним и тем же треугольником.)*

Ответ: 90.

Пусть M — середина AB. Тогда по свойству медианы, $OM = \frac{3}{2}OG$, где G — точка пересечения медиан. Поэтому M имеет координаты $\left(\frac{19}{2}, \frac{11}{2}\right)$.



Пусть (x_a, y_a), (x_b, y_b) — координаты точек A и B. Поскольку M — середина отрезка AB, имеем $x_a + x_b = 19$, $y_a + y_b = 11$. Тогда для x_a имеется 18 возможных натуральных значений: $1, 2, \ldots, 18$, каждому из которых однозначно соответствует натуральное $x_b = 19 - x_a$. Аналогично, для y_a имеется 10 возможностей. Итого $18 \cdot 10 = 180$ возможностей для выбора точки A, и для каждой из них единственным образом определяется подходящая точка B. Согласно нашей договоренности (OAB и OBA считаются одним и тем же треугольником), всего имеем $180/2 = 90$ вариантов.

Заметим, что во всех указанных вариантах точка A (и B) не лежит на прямой OM, т.е. треугольник OAB не вырождается (иначе выполнялось бы $y_a/x_a = 11/19$). Таким образом, все найденные варианты действительно подходят.

8.2. *На координатной плоскости рисуют треугольник OAB, у которого точка пересечения медиан находится в точке $\left(\frac{17}{3}, \frac{14}{3}\right)$, а точки A и B имеют натуральные координаты. Найдите количество таких треугольников. (Здесь через O обозначено начало координат – точка $(0,0)$; два треугольника с одинаковым набором вершин считаются одинаковыми, т.е. OAB и OBA считаем одним и тем же треугольником.)*

Ответ: 104.

8.3. *На координатной плоскости рисуют треугольник OAB, у которого точка пересечения медиан находится в точке $\left(\frac{16}{3}, \frac{11}{3}\right)$, а точки A и B имеют натуральные координаты. Найдите количество таких треугольников. (Здесь через O обозначено начало координат – точка $(0,0)$; два треугольника с одинаковым набором вершин считаются одинаковыми, т.е. OAB и OBA считаем одним и тем же треугольником.)*

Ответ: 75.

8.4. *На координатной плоскости рисуют треугольник OAB, у которого точка пересечения медиан находится в точке $\left(\frac{20}{3}, \frac{13}{3}\right)$, а точки A и B имеют натуральные координаты. Найдите количество таких треугольников. (Здесь через O обозначено начало координат – точка $(0,0)$; два треугольника с одинаковым набором вершин считаются одинаковыми, т.е. OAB и OBA считаем одним и тем же треугольником.)*

Ответ: 114.

8.5. *На координатной плоскости рисуют треугольник OAB, у которого точка пересечения медиан находится в точке $\left(\frac{10}{3}, \frac{19}{3}\right)$, а точки A и B имеют натуральные координаты. Найдите количество таких* *треугольников. (Здесь через O обозначено начало координат – точка $(0, 0)$; два треугольника с одинаковым набором вершин считаются одинаковыми, т.е. OAB и OBA считаем одним и тем же треугольником.)*

Ответ: 81.