Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике для 10 класса, 2021-2022 учебный год.

1.1. *По кругу с постоянными скоростями ездят на велосипедах Петя и Вася. Скорость Пети равна 8 км/ч, а скорость Васи – 10 км/ч. Вначале они ехали в разные стороны (Петя – по часовой стрелке, а Вася – против), а затем Петя изменил направление движения (начал двигаться против часовой стрелки) и одновременно увеличил свою скорость вдвое. После этого велосипедисты стали встречаться в k раз реже. Найдите k.*

Ответ: 3

Решение. Пусть d км — длина окружности. Тогда вначале время между двумя последовательными встречами велосипедистов равно $t_1 = d/(8+10) = d/18$ ч. Затем скорость Пети стала равной 16 км/ч и велосипедисты стали двигаться в одну сторону, поэтому время между двумя последовательными встречами велосипедистов стало равно $t_2 = d/(16-10) = d/6$ ч. Отсюда следует, что частота встреч уменьшилась в $t_2/t_1 = 3$ раза.

1.2. *По кругу с постоянными скоростями ездят на велосипедах Петя и Вася. Скорость Пети равна 18 км/ч, а скорость Васи – 14 км/ч. Вначале они ехали по часовой стрелке, а затем Петя изменил направление движения (начал двигаться против часовой стрелки) и одновременно уменьшил свою скорость втрое. После этого велосипедисты стали встречаться в k раз чаще. Найдите k.*

Ответ: 5

1.3. *По кругу с постоянными скоростями ездят на велосипедах Петя и Вася. Скорость Пети равна 8 км/ч, а скорость Васи – 18 км/ч. Вначале они ехали в разные стороны (Петя – по часовой стрелке, а Вася – против), а затем Петя изменил направление движения (начал двигаться против часовой стрелки) и одновременно увеличил свою скорость вдвое. После этого велосипедисты стали встречаться в k раз реже. Найдите k.*

Ответ: 13

1.4. *По кругу с постоянными скоростями ездят на велосипедах Петя и Вася. Скорость Пети равна 12 км/ч, а скорость Васи – 14 км/ч. Вначале они ехали по часовой стрелке, а затем Петя изменил направление движения (начал двигаться против часовой стрелки) и одновременно уменьшил свою скорость вдвое. После этого велосипедисты стали встречаться в k раз чаще. Найдите k.*

Ответ: 10

1.5. *По кругу с постоянными скоростями ездят на велосипедах Петя и Вася. Скорость Пети равна 7 км/ч, а скорость Васи – 17 км/ч. Вначале они ехали в разные стороны (Петя – по часовой стрелке, а Вася – против), а затем Петя изменил направление движения (начал двигаться против часовой стрелки) и одновременно увеличил свою скорость втрое. После этого велосипедисты стали встречаться в k раз реже. Найдите k.*

Ответ: 6

2.1. *Саша решил квадратное уравнение* $3x^2 + bx + c = 0$ *(где* b *и* c *— некоторые действительные числа). В ответе у него получился ровно один корень:* $x = -4$*. Найдите* b*.*

Ответ: 24

Решение. По теореме Виета $x_1 + x_2 = -b/3$. В нашем случае $x_1 = x_2 = -4$, откуда $-b/3 = -8$ и $b = 24$.

Замечание. Другое решение можно получить, заметив, что уравнение должно приводиться к полному квадрату $3(x+4)^2 = 0$.

2.2. *Саша решил квадратное уравнение* $2x^2 + bx + c = 0$ *(где* b *и* c *— некоторые действительные числа). В ответе у него получился ровно один корень:* $x = -4$*. Найдите* b*.*

Ответ: 16

2.3. *Саша решил квадратное уравнение* $5x^2 + bx + c = 0$ *(где* b *и* c *— некоторые действительные числа). В ответе у него получился ровно один корень:* $x = -2$*. Найдите* b*.*

Ответ: 20

2.4. *Саша решил квадратное уравнение* $3x^2 + bx + c = 0$ *(где* b *и* c *— некоторые действительные числа). В ответе у него получился ровно один корень:* $x = -3$*. Найдите* b*.*

Ответ: 18

2.5. *Саша решил квадратное уравнение* $2x^2 + bx + c = 0$ *(где* b *и* c *— некоторые действительные числа). В ответе у него получился ровно один корень:* $x = -3$*. Найдите* b*.*

Ответ: 12

3.1. *Найдите сумму*

$$\sqrt[7]{(-7)^7} + \sqrt[8]{(-8)^8} + \sqrt[9]{(-9)^9} + \ldots + \sqrt[100]{(-100)^{100}}.$$

(Каждое слагаемое — вида $\sqrt[k]{(-k)^k}$*).*

Ответ: 47

Решение. Заметим, что $\sqrt[k]{(-k)^k}$ при четном k равно k, а при нечетном k равно $-k$. Поэтому наша сумма равна $-7+8-9+10-\ldots-99+100 = (-7+8)+(-9+10)+\ldots+(-99+100)$. В последнем выражении 47 скобок, каждая из которых равна 1.

3.2. *Найдите сумму*

$$\sqrt[17]{(-17)^{17}} + \sqrt[18]{(-18)^{18}} + \sqrt[19]{(-19)^{19}} + \ldots + \sqrt[112]{(-112)^{112}}.$$

(Каждое слагаемое — вида $\sqrt[k]{(-k)^k}$*).*

Ответ: 48

3.3. *Найдите сумму*

$$\sqrt[15]{(-15)^{15}} + \sqrt[16]{(-16)^{16}} + \sqrt[17]{(-17)^{17}} + \ldots + \sqrt[104]{(-104)^{104}}.$$

(Каждое слагаемое — вида $\sqrt[k]{(-k)^k}$*).*

Ответ: 45

3.4. *Найдите сумму*

$$\sqrt[11]{(-11)^{11}} + \sqrt[12]{(-12)^{12}} + \sqrt[13]{(-13)^{13}} + \ldots + \sqrt[116]{(-116)^{116}}.$$

(Каждое слагаемое — вида $\sqrt[k]{(-k)^k}$*).*

Ответ: 53

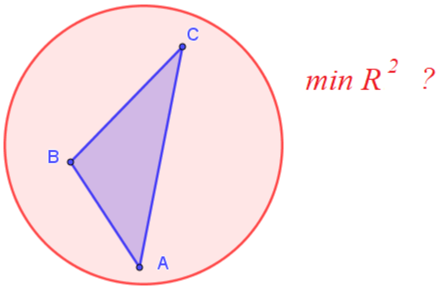
3.5. *Найдите сумму*

$$\sqrt[9]{(-9)^9} + \sqrt[10]{(-10)^{10}} + \sqrt[11]{(-11)^{11}} + \ldots + \sqrt[106]{(-106)^{106}}.$$

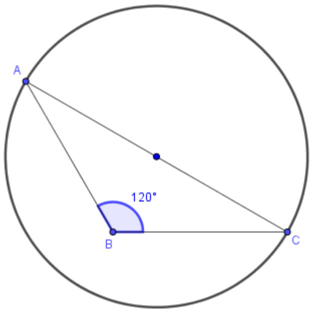
(Каждое слагаемое — вида $\sqrt[k]{(-k)^k}$*).*

Ответ: 49

4.1. *Про треугольник ABC известно следующее: $AB = 12$, $BC = 10$, $\angle ABC = 120°$. Найдите R^2, где R — радиус наименьшего круга, в который можно поместить этот треугольник.*



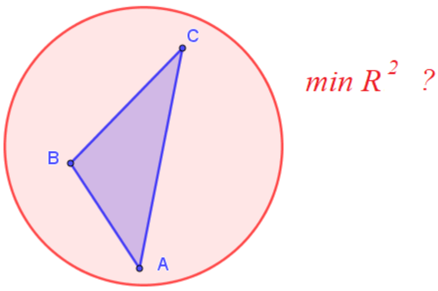
Ответ: 91



Решение. Так как отрезок AC помещается в круг, то $2R \geqslant AC$. С другой стороны, круг, построенный на AC как на диаметре, покрывает наш треугольник ABC, поскольку $\angle ABC > 90°$. Таким образом, искомое значение R равно $AC/2$, и $R^2 = AC^2/4$.

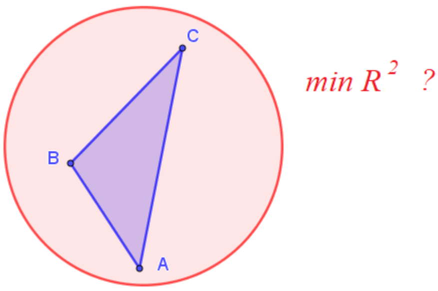
Далее, по теореме косинусов имеем $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 120° = 12^2 + 10^2 + 2 \cdot 12 \cdot 10/2 = 4(6^2 + 5^2 + 6 \cdot 5) = 4 \cdot 91$.

4.2. *Про треугольник ABC известно следующее: $AB = 8$, $BC = 16$, $\angle ABC = 120°$. Найдите R^2, где R — радиус наименьшего круга, в который можно поместить этот треугольник.*



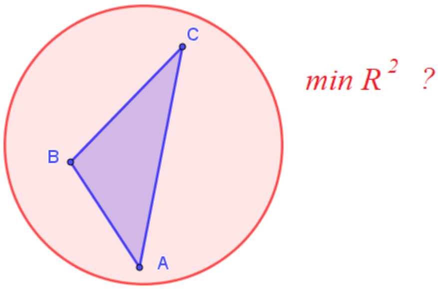
Ответ: 112

4.3. *Про треугольник ABC известно следующее: $AB = 2\sqrt{3}$, $BC = 8$, $\angle ABC = 150°$. Найдите R^2, где R — радиус наименьшего круга, в который можно поместить этот треугольник.*



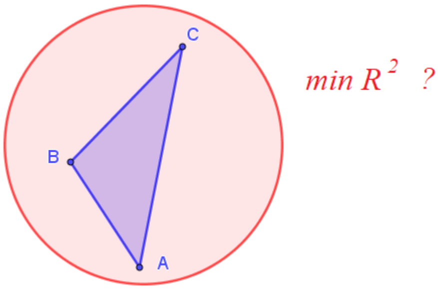
Ответ: 31

4.4. *Про треугольник* ABC *известно следующее:* $AB = 4\sqrt{2}$, $BC = 10$, $\angle ABC = 135^\circ$. *Найдите* R^2, *где* R *— радиус наименьшего круга, в который можно поместить этот треугольник.*



Ответ: 53

4.5. *Про треугольник* ABC *известно следующее:* $AB = 4\sqrt{3}$, $BC = 6$, $\angle ABC = 150^\circ$. *Найдите* R^2, *где* R *— радиус наименьшего круга, в который можно поместить этот треугольник.*



Ответ: 39

5.1. *Рассмотрим число 616. У него сумма цифр равна 13, а произведение цифр равно 36. А каково наибольшее натуральное число, у которого сумма цифр равна 13, а произведение цифр равно 36?*

Ответ: 3322111

Решение. В десятичной записи данного числа не может быть нулей. Выпишем все цифры данного числа, которые больше 1, их произведение по-прежнему равно 36. Так как 36 раскладывается на простые множители как $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, то возможные наборы цифр, больших 1, это: $\{2,2,3,3\}$, $\{2,2,9\}$, $\{2,3,6\}$, $\{3,3,4\}$, $\{4,9\}$, $\{6,6\}$. Так как сумма цифр равна 13, то количество единиц восстанавливается в каждом из случаев однозначно, в итоге возможные наборы цифр: $\{1,1,1,2,2,3,3\}$, $\{2,2,9\}$, $\{1,1,2,3,6\}$, $\{1,1,1,3,3,4\}$, $\{4,9\}$, $\{1,6,6\}$. Видим, что наибольшее число может быть семизначным, и это возможно только в первом случае. Остается заметить, что максимальное число с набором цифр $\{1,1,1,2,2,3,3\}$ — это число 3322111.

5.2. *Рассмотрим число 416. У него сумма цифр равна 11, а произведение цифр равно 24. А каково наибольшее натуральное число, у которого сумма цифр равна 11, а произведение цифр равно 24?*

Ответ: 322211

5.3. *Рассмотрим число 813. У него сумма цифр равна 12, а произведение цифр равно 24. А каково наибольшее натуральное число, у которого сумма цифр равна 12, а произведение цифр равно 24?*

Ответ: 3222111

5.4. *Рассмотрим число 6152. У него сумма цифр равна 14, а произведение цифр равно 60. А каково наибольшее натуральное число, у которого сумма цифр равна 14, а произведение цифр равно 60?*

Ответ: 532211

5.5. *Рассмотрим число 914. У него сумма цифр равна 14, а произведение цифр равно 36. А каково наибольшее натуральное число, у которого сумма цифр равна 14, а произведение цифр равно 36?*

Ответ: 33221111

6.1. *На плоскости отмечено 55 точек – вершины некоторого правильного 54-угольника и его центр. Петя хочет покрасить в красный цвет тройку отмеченных точек так, чтобы покрашенные точки являлись вершинами некоторого правильного треугольника. Сколькими способами Петя может это сделать?*

Ответ: 72

Решение. Считаем, что наш 54-угольник вписан в окружность, и его вершины делят эту окружность на 54 дуги длины 1.

Если одна из покрашенных точек — центр, то две другие покрашенные точки должны являться концами дуги величиной $54/6 = 9$. Таких возможностей — 54.

Иначе все три покрашенные вершины должны образовывать правильный треугольник, вершины которого делят окружность на 3 дуги величиной $54/3 = 18$. Таких возможностей — $54/3 = 18$.

Итого: $54 + 18 = 72$ варианта.

6.2. *На плоскости отмечена 61 точка – вершины некоторого правильного 60-угольника и его центр. Петя хочет покрасить в красный цвет тройку отмеченных точек так, чтобы покрашенные точки являлись вершинами некоторого правильного треугольника. Сколькими способами Петя может это сделать?*

Ответ: 80

6.3. *На плоскости отмечено 43 точки – вершины некоторого правильного 42-угольника и его центр. Петя хочет покрасить в красный цвет тройку отмеченных точек так, чтобы покрашенные точки являлись вершинами некоторого правильного треугольника. Сколькими способами Петя может это сделать?*

Ответ: 56

6.4. *На плоскости отмечено 67 точек – вершины некоторого правильного 66-угольника и его центр. Петя хочет покрасить в красный цвет тройку отмеченных точек так, чтобы покрашенные точки являлись вершинами некоторого правильного треугольника. Сколькими способами Петя может это сделать?*

Ответ: 88

6.5. *На плоскости отмечено 49 точек – вершины некоторого правильного 48-угольника и его центр. Петя хочет покрасить в красный цвет тройку отмеченных точек так, чтобы покрашенные точки являлись вершинами некоторого правильного треугольника. Сколькими способами Петя может это сделать?*

Ответ: 64

7.1. *В ряд записали числа:* 100^{100}, 101^{101}, 102^{102}, $\ldots$, 234^{234} *(т.е. выписали числа вида* n^n *для натуральных* n *от 100 до 234). Сколько среди выписанных чисел точных квадратов? (Точным квадратом называют квадрат целого числа.)*

Ответ: 71

Решение. Рассмотрим число вида m^k, где m и k — натуральные числа. Если k четно, то m^k — точный квадрат. Если же k нечетно, то m^k является точным квадратом тогда и только тогда, когда m является точным квадратом. Таким образом, ответ в нашей задаче — суммарное количество четных чисел и нечетных точных квадратов в множестве чисел $\{100, 101, 102, \ldots, 234\}$. Нужных четных чисел $(234-98)/2 = 68$. Нужных точных квадратов — ровно 3: $11^2, 13^2, 15^2$. Итого $68+3=71$ искомых чисел.

7.2. *В ряд записали числа:* 56^{56}, 57^{57}, 58^{58}, $\ldots$, 218^{218} *(т.е. выписали числа вида* n^n *для натуральных* n *от 56 до 218). Сколько среди выписанных чисел точных квадратов? (Точным квадратом называют квадрат целого числа.)*

Ответ: 85

7.3. *В ряд записали числа:* 74^{74}, 75^{75}, 76^{76}, $\ldots$, 243^{243} *(т.е. выписали числа вида* n^n *для натуральных* n *от 74 до 243). Сколько среди выписанных чисел точных квадратов? (Точным квадратом называют квадрат целого числа.)*

Ответ: 89

7.4. *В ряд записали числа:* 85^{85}, 86^{86}, 87^{87}, $\ldots$, 229^{229} *(т.е. выписали числа вида* n^n *для натуральных* n *от 85 до 229). Сколько среди выписанных чисел точных квадратов? (Точным квадратом называют квадрат целого числа.)*

Ответ: 75

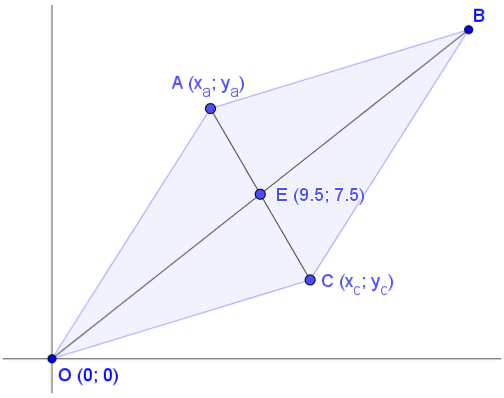
7.5. *В ряд записали числа:* 103^{103}, 104^{104}, 105^{105}, $\ldots$, 227^{227} *(т.е. выписали числа вида* n^n *для натуральных* n *от 103 до 227). Сколько среди выписанных чисел точных квадратов? (Точным квадратом называют квадрат целого числа.)*

Ответ: 65

8.1. *На координатной плоскости рисуют параллелограмм $OABC$, у которого центр находится в точке $\left(\frac{19}{2}, \frac{15}{2}\right)$, а точки A, B и C имеют натуральные координаты. Найдите количество таких параллелограммов. (Здесь через O обозначено начало координат - точка $(0,0)$; два параллелограмма с одинаковым набором вершин считаются одинаковыми, т.е. $OABC$ и $OCBA$ считаем одним и тем же параллелограммом.)*

Ответ: 126.

Решение. Заметим, что $OABC$ является параллелограммом тогда и только тогда, когда точка $E\left(\frac{19}{2}, \frac{15}{2}\right)$ — середина отрезков OB и AC, и кроме того, точки O, A, B, C не лежат на одной прямой.



Точка E — середина отрезка OB, поэтому B определяется однозначно как $(19, 15)$. Пусть (x_a, y_a), (x_c, y_c) — координаты точек A и C. Поскольку E — середина отрезка AC, имеем $x_a + x_c = 19$, $y_a + y_c = 15$. Тогда для x_a имеется 18 возможных натуральных значений: $1, 2, \ldots, 18$, каждому из которых однозначно соответствует натуральное $x_c = 19 - x_a$. Аналогично, для y_a имеется 14 возможностей. Итого $18 \cdot 14 = 252$ возможностей для выбора точки A, и для каждой из них единственным образом определяется подходящая точка C. Согласно нашей договоренности ($OABC$ и $OCBA$ считаются одним и тем же параллелограммом), всего имеем $252/2 = 126$ вариантов.

Заметим, что во всех указанных вариантах точка A (и C) не лежит на прямой OB (иначе выполнялось бы $y_a/x_a = 15/19$), т.е. параллелограмм $OABC$ не вырождается. Таким образом, все найденные варианты действительно подходят.

8.2. *На координатной плоскости рисуют параллелограмм $OABC$, у которого центр находится в точке $\left(\frac{17}{2}, \frac{19}{2}\right)$, а точки A, B и C имеют натуральные координаты. Найдите количество таких параллелограммов. (Здесь через O обозначено начало координат - точка $(0,0)$; два параллелограмма с одинаковым набором вершин считаются одинаковыми, т.е. $OABC$ и $OCBA$ считаем одним и тем же параллелограммом.)*

Ответ: 144

8.3. *На координатной плоскости рисуют параллелограмм $OABC$, у которого центр находится в точке $\left(\frac{11}{2}, \frac{17}{2}\right)$, а точки A, B и C имеют натуральные координаты. Найдите количество таких параллелограммов. (Здесь через O обозначено начало координат - точка $(0,0)$; два параллелограмма с одинаковым набором вершин считаются одинаковыми, т.е. $OABC$ и $OCBA$ считаем одним и тем же параллелограммом.)*

Ответ: 80

8.4. *На координатной плоскости рисуют параллелограмм $OABC$, у которого центр находится в точке $\left(\frac{15}{2}, \frac{13}{2}\right)$, а точки A, B и C имеют натуральные координаты. Найдите количество таких параллелограммов. (Здесь через O обозначено начало координат - точка $(0,0)$; два параллелограмма с одинаковым набором вершин считаются одинаковыми, т.е. $OABC$ и $OCBA$ считаем одним и тем же параллелограммом.)*

Ответ: 84

8.5. *На координатной плоскости рисуют параллелограмм $OABC$, у которого центр находится в точке $\left(\frac{13}{2}, \frac{17}{2}\right)$, а точки A, B и C имеют натуральные координаты. Найдите количество таких параллелограммов. (Здесь через O обозначено начало координат - точка $(0,0)$; два параллелограмма с одинаковым набором вершин считаются одинаковыми, т.е. $OABC$ и $OCBA$ считаем одним и тем же параллелограммом.)*

Ответ: 96.