Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике для 9 класса, 2021-2022 учебный год.

1.1. *Первое января некоторого невисокосного года выпало на субботу. А сколько в этом году пятниц?*

Ответ: 52

Решение. В невисокосном году 365 дней. Первые два дня выпали на субботу и воскресенье, далее идёт 51 полная неделя ($51 \cdot 7 = 357$ дней) и ещё 6 дней. Итого, 52 пятницы.

1.2. *Первое января некоторого високосного года выпало на субботу. А сколько в этом году воскресений?*

Ответ: 53

1.3. *Первое января некоторого невисокосного года выпало на понедельник. А сколько в этом году пятниц?*

Ответ: 52

1.4. *Первое января некоторого невисокосного года выпало на четверг. А сколько в этом году понедельников?*

Ответ: 52

1.5. *Первое января некоторого високосного года выпало на вторник. А сколько в этом году четвергов?*

Ответ: 52

2.1. *Лиза написала квадратное уравнение. Артём стёр у него свободный член, из-за этого уравнение теперь выглядит вот так* $2x^2 + 20x + ... = 0$. *Лиза не помнит, какое число стёр Артём, но помнит, что уравнение имеет ровно один действительный корень. Чему равен этот корень?*

Ответ: -5

Решение. Квадратное уравнение имеет один корень тогда и только тогда, когда его дискриминант равен 0. А если дискриминант равен 0, то корень вычисляется по формуле $x_1 = -b/(2a) = -20/4 = -5$.

2.2. *Лиза написала квадратное уравнение. Артём стёр у него свободный член, из-за этого уравнение теперь выглядит вот так* $3x^2 - 18x + ... = 0$. *Лиза не помнит, какое число стёр Артём, но помнит, что уравнение имеет ровно один действительный корень. Чему равен этот корень?*

Ответ: 3

2.3. *Лиза написала квадратное уравнение. Артём стёр у него свободный член, из-за этого уравнение теперь выглядит вот так* $2x^2 - 24x + ... = 0$. *Лиза не помнит, какое число стёр Артём, но помнит, что уравнение имеет ровно один действительный корень. Чему равен этот корень?*

Ответ: 6

2.4. *Лиза написала квадратное уравнение. Артём стёр у него свободный член, из-за этого уравнение теперь выглядит вот так* $3x^2 + 24x + ... = 0$. *Лиза не помнит, какое число стёр Артём, но помнит, что уравнение имеет ровно один действительный корень. Чему равен этот корень?*

Ответ: -4

2.5. *Лиза написала квадратное уравнение. Артём стёр у него свободный член, из-за этого уравнение теперь выглядит вот так* $5x^2 + 20x + ... = 0$. *Лиза не помнит, какое число стёр Артём, но помнит, что уравнение имеет ровно один действительный корень. Чему равен этот корень?*

Ответ: -2

3.1. *Лиза нарисовала графики всех функций вида* $y = ax+b$*, где* a *и* b *принимают все натуральные значения от 1 до 100. Сколько из этих графиков проходят через точку* $(3, 333)$*?*

Ответ: 23

Решение. Мы ищем такие a и b, что $333 = 3a + b$. То есть $b = 3(111 - a)$. Следовательно, $0 < 111 - a \leqslant 33$, $78 \leqslant a$. Таких a ровно 23 и для каждого из них единственным образом подбирается b.

3.2. *Лиза нарисовала графики всех функций вида* $y = ax+b$*, где* a *и* b *принимают все натуральные значения от 1 до 100. Сколько из этих графиков проходят через точку* $(7, 707)$*?*

Ответ: 14

3.3. *Лиза нарисовала графики всех функций вида* $y = ax+b$*, где* a *и* b *принимают все натуральные значения от 1 до 100. Сколько из этих графиков проходят через точку* $(4, 444)$*?*

Ответ: 15

3.4. *Лиза нарисовала графики всех функций вида* $y = ax+b$*, где* a *и* b *принимают все натуральные значения от 1 до 200. Сколько из этих графиков проходят через точку* $(3, 666)$*?*

Ответ: 45

3.5. *Лиза нарисовала графики всех функций вида* $y = ax+b$*, где* a *и* b *принимают все натуральные значения от 1 до 200. Сколько из этих графиков проходят через точку* $(4, 808)$*?*

Ответ: 49

4.1. *Море включает в себя залив с более соленой водой. Солёность воды в море 120 промилле, в заливе 240 промилле, в части моря, не включающей залив - 110 промилле. Во сколько раз объём воды в море больше объёма воды в заливе? Объём воды считается, включая объём соли. Промилле - тысячная часть числа; соленость определяется как отношение объема соли к общему объему смеси*

Ответ: 13

Решение. Пусть в заливе объём соли s_1, а объём воды v_1; в части моря, не включающей залив, объём соли s_2, а весь её объём v_2. Имеем уравнения

$$\frac{s_1}{v_1} = \frac{240}{1000}; \qquad \frac{s_2}{v_2} = \frac{110}{1000}; \qquad \frac{s_1 + s_2}{v_1 + v_2} = \frac{120}{1000}.$$

Таким образом, $120(v_1 + v_2) = 1000(s_1 + s_2) = 240v_1 + 110v_2$, откуда $120v_1 = 10v_2$, $12v_1 = v_2$. Нам требуется найти отношение $(v_1 + v_2)/v_1$. Оно равно 13.

4.2. *Море включает в себя залив с более соленой водой. Солёность воды в море 150 промилле, в заливе 270 промилле, в части моря, не включающей залив - 120 промилле. Во сколько раз объём воды в море больше объёма воды в заливе? Объём воды считается, включая объём соли. Промилле - тысячная часть числа; соленость определяется как отношение объема соли к общему объему смеси*

Ответ: 5

4.3. *Море включает в себя залив с более соленой водой. Солёность воды в море 160 промилле, в заливе 280 промилле, в части моря, не включающей залив - 100 промилле. Во сколько раз объём воды в море больше объёма воды в заливе? Объём воды считается, включая объём соли. Промилле - тысячная часть числа; соленость определяется как отношение объема соли к общему объему смеси*

Ответ: 3

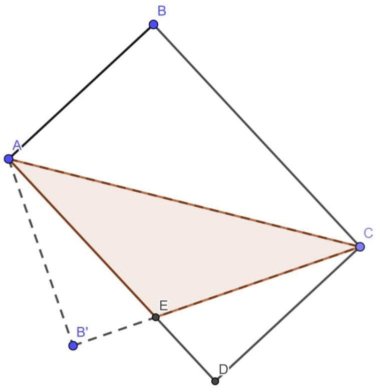
4.4. *Море включает в себя залив с более соленой водой. Солёность воды в море 130 промилле, в заливе 250 промилле, в части моря, не включающей залив - 110 промилле. Во сколько раз объём воды в море больше объёма воды в заливе? Объём воды считается, включая объём соли. Промилле - тысячная часть числа; соленость определяется как отношение объема соли к общему объему смеси*

Ответ: 7

4.5. *Море включает в себя залив с более соленой водой. Солёность воды в море 140 промилле, в заливе 420 промилле, в части моря, не включающей залив - 100 промилле. Во сколько раз объём воды в море больше объёма воды в заливе? Объём воды считается, включая объём соли. Промилле - тысячная часть числа; соленость определяется как отношение объема соли к общему объему смеси*

Ответ: 8

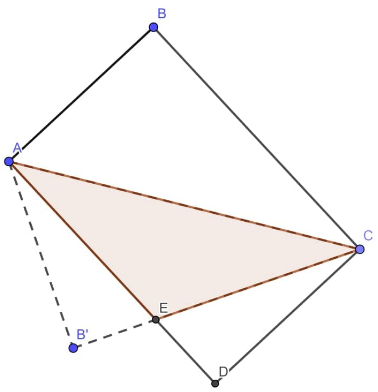
5.1. *Бумажный прямоугольник* 4×8 *сложили по диагонали как показано на рисунке. Чему равна площадь треугольника, покрытого дважды?*



Ответ: 10.

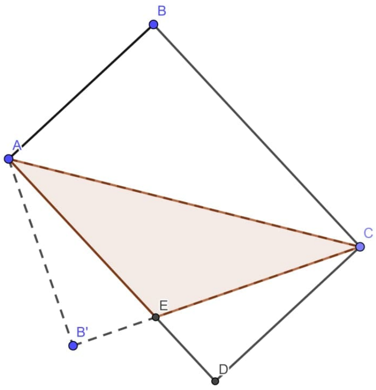
Решение. По теореме Пифагора $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 4\sqrt{5}$. Треугольник AEC — равнобедренный, и если опустить в нём высоту EH, то треугольник AEH будет подобен треугольнику ACD. Следовательно, $AH/EH = AD/DC = 2$. $AH = 2\sqrt{5}$, так как высота в равнобедренном треугольнике является медианой. Значит, $EH = \sqrt{5}$, $S(AEC) = \sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5}/2 = 10$.

5.2. *Бумажный прямоугольник* 6×18 *сложили по диагонали как показано на рисунке. Чему равна площадь треугольника, покрытого дважды?*



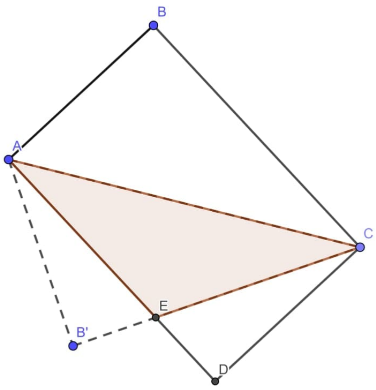
Ответ: 30.

5.3. *Бумажный прямоугольник* 12×24 *сложили по диагонали как показано на рисунке. Чему равна площадь треугольника, покрытого дважды?*



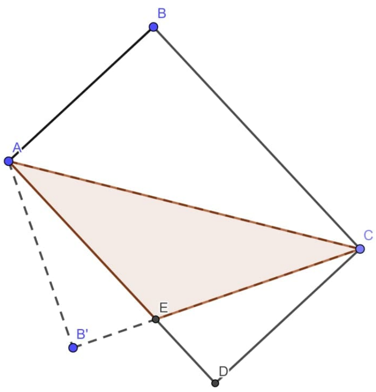
Ответ: 90.

5.4. *Бумажный прямоугольник* 12×36 *сложили по диагонали как показано на рисунке. Чему равна площадь треугольника, покрытого дважды?*



Ответ: 120.

5.5. *Бумажный прямоугольник* 8×16 *сложили по диагонали как показано на рисунке. Чему равна площадь треугольника, покрытого дважды?*



Ответ: 40.

6.1. *В кружке 9 человек. Каждый день какие-то трое из них вместе ходили в кафе, а остальные в кафе не ходили. После 360 дней оказалось, что любые два человека из кружка были вместе в кафе одно и то же число раз. Какое?*

Ответ: 30

Решение. Всего пар человек в кружке $9 \cdot 8/2 = 36$. За 360 дней в кафе побывало $360 \cdot 3$ пар (так как каждый день прибавляется по три пары). Так как все пары побывали одинаковое количество раз, это количество равно $360 \cdot 3/36 = 30$.

6.2. *В кружке 10 человек. Каждый день какие-то трое из них вместе ходили в кафе, а остальные в кафе не ходили. После 360 дней оказалось, что любые два человека из кружка были вместе в кафе одно и то же число раз. Какое?*

Ответ: 24

6.3. *В кружке 8 человек. Каждый день какие-то трое из них вместе ходили в кафе, а остальные в кафе не ходили. После 560 дней оказалось, что любые два человека из кружка были вместе в кафе одно и то же число раз. Какое?*

Ответ: 60

6.4. *В кружке 11 человек. Каждый день какие-то трое из них вместе ходили в кафе, а остальные в кафе не ходили. После 330 дней оказалось, что любые два человека из кружка были вместе в кафе одно и то же число раз. Какое?*

Ответ: 18

6.5. *В кружке 12 человек. Каждый день какие-то трое из них вместе ходили в кафе, а остальные в кафе не ходили. После 396 дней оказалось, что любые два человека из кружка были вместе в кафе одно и то же число раз. Какое?*

Ответ: 18

7.1. *Действительные* x, y, z *таковы, что* $xy + xz + yz + x + y + z = -3$, $x^2 + y^2 + z^2 = 5$. *Чему равно* $x + y + z$?

Ответ: -1

Решение. Сложим удвоенное первое равенство со вторым, получим $(x + y + z)^2 + 2(x + y + z) = -1$. Следовательно, $(x + y + z + 1)^2 = 0$, $x + y + z = -1$.

7.2. *Действительные* x, y, z *таковы, что* $xy + xz + yz + 3x + 3y + 3z = -7$, $x^2 + y^2 + z^2 = 5$. *Чему равно* $x + y + z$?

Ответ: -3

7.3. *Действительные* x, y, z *таковы, что* $xy + xz + yz - 2x - 2y - 2z = -4$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. *Чему равно* $x + y + z$?

Ответ: 2

7.4. *Действительные* x, y, z *таковы, что* $xy + xz + yz + 2x + 2y + 2z = -5$, $x^2 + y^2 + z^2 = 6$. *Чему равно* $x + y + z$?

Ответ: -2

7.5. *Действительные* x, y, z *таковы, что* $xy + xz + yz - x - y - z = -4$, $x^2 + y^2 + z^2 = 7$. *Чему равно* $x + y + z$?

Ответ: 1

8.1. *Из всех чисел с суммой цифр 25 найдите то, произведение цифр которого максимально. Если таких чисел несколько, напишите в ответ наименьшее из них.*

Ответ: 33333334

Решение. Очевидно, в числе нет 0. Если в числе есть цифра 1, то её можно убрать и увеличить какую-нибудь из оставшихся цифр на 1, от этого сумма не изменится, а произведение увеличится. Если в числе есть цифра $x \geqslant 5$, то её можно заменить на цифры 2 и $x-2$, и произведение увеличится: $2(x-2) > x$ при $x > 4$. Наконец, если в числе хотя бы три двойки или двойка и четверка, то их можно заменить на две тройки. Если в числе хотя бы две четверки, то их можно заменить на 3, 3 и 2. Таким образом, в числе с максимальным произведением помимо троек может быть или не более одной четверки, или не более двух двоек. Это возможно только если в числе 7 троек и либо одна четверка, либо две двойки (в обоих случаях произведения одинаковы). Наименьшим из полученных чисел является 33333334.

8.2. *Из всех чисел с суммой цифр 25 найдите то, произведение цифр которого максимально. Если таких чисел несколько, напишите в ответ наибольшее из них.*

Ответ: 333333322

8.3. *Из всех чисел с суммой цифр 28 найдите то, произведение цифр которого максимально. Если таких чисел несколько, напишите в ответ наименьшее из них.*

Ответ: 333333334

8.4. *Из всех чисел с суммой цифр 28 найдите то, произведение цифр которого максимально. Если таких чисел несколько, напишите в ответ наибольшее из них.*

Ответ: 3333333322

8.5. *Из всех чисел с суммой цифр 26 найдите то, произведение цифр которого максимально. Если таких чисел несколько, напишите в ответ наименьшее из них.*

Ответ: 233333333