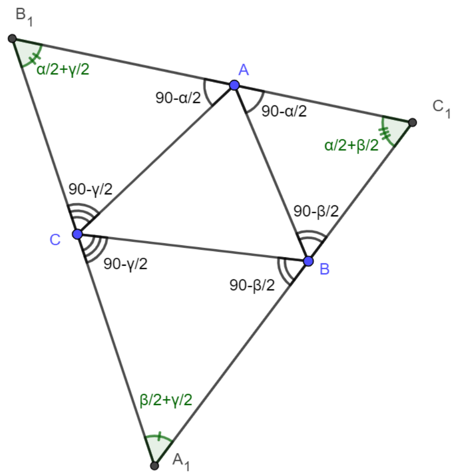
Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике для 8 класса, 2021-2022 учебный год.

1.1. *Прямые, содержащие биссектрисы внешних углов треугольника, в котором есть углы 42 и 59 градусов, попарно пересеклись и образовали новый треугольник. Найдите градусную меру его наибольшего угла.*

Ответ: 69

Решение. Обозначим вершины данного в условии треугольника за A, B, C, а его углы за α, β и γ, соответственно. Кроме того, пусть A_1, B_1 и C_1 — точки пересечения биссектрис внешних углов B и C, A и C, A и B, соответственно. Тогда $\angle B_1AC = \angle C_1AB = (180^\circ - \alpha)/2 = 90^\circ - \alpha/2$. Аналогично $\angle B_1CA = 90^\circ - \gamma/2$. Тогда из суммы углов треугольника B_1AC находим $\angle AB_1C = 180^\circ - (90^\circ - \alpha/2) - (90^\circ - \gamma/2) = \alpha/2 + \gamma/2$. Следовательно, углы треугольника $A_1B_1C_1$ — это полусуммы углов треугольника ABC. Очевидно, чтобы получить наибольший угол треугольника $A_1B_1C_1$, надо взять полусумму двух наибольших углов треугольника ABC. Углы ABC равны 42°, 59° и 79°, поэтому наибольшая полусумма равна 69°.



1.2. *Прямые, содержащие биссектрисы внешних углов треугольника, в котором есть углы 55 и 46 градусов, попарно пересеклись и образовали новый треугольник. Найдите градусную меру его наибольшего угла.*

Ответ: 67

1.3. *Прямые, содержащие биссектрисы внешних углов треугольника, в котором есть углы 36 и 63 градусов, попарно пересеклись и образовали новый треугольник. Найдите градусную меру его наибольшего угла.*

Ответ: 72

1.4. *Прямые, содержащие биссектрисы внешних углов треугольника, в котором есть углы 71 и 40 градусов, попарно пересеклись и образовали новый треугольник. Найдите градусную меру его наибольшего угла.*

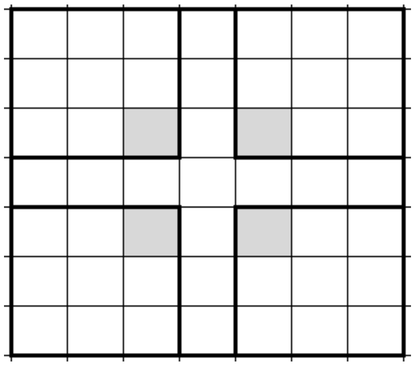
Ответ: 70

1.5. *Прямые, содержащие биссектрисы внешних углов треугольника, в котором есть углы 52 и 69 градусов, попарно пересеклись и образовали новый треугольник. Найдите градусную меру его наибольшего угла.*

Ответ: 64

2.1. *При каком наибольшем k можно утверждать, что при любой покраске в чёрный цвет k клеток белого квадрата 7×7 обязательно останется целиком белый квадрат 3×3 со сторонами, идущими по линиям сетки?*

Ответ: 3



Решение. Выделим четыре квадрата 3×3, примыкающие к углам квадрата 7×7. Эти квадраты не пересекаются, поэтому если закрашено не более трех клеток, то хотя бы один из этих квадратов остался целиком белым. Если же мы закрасим 4 клетки, отмеченные на рисунке серым, то ни одного белого квадрата 3×3 не останется.

2.2. *При каком наибольшем k можно утверждать, что при любой покраске в чёрный цвет k клеток белого прямоугольника 7×13 обязательно останется целиком белый квадрат 4×4 со сторонами, идущими по линиям сетки?*

Ответ: 2

2.3. *При каком наибольшем k можно утверждать, что при любой покраске в чёрный цвет k клеток белого прямоугольника 10×10 обязательно останется целиком белый квадрат 3×3 со сторонами, идущими по линиям сетки?*

Ответ: *8*

2.4. *При каком наибольшем k можно утверждать, что при любой покраске в чёрный цвет k клеток белого прямоугольника 7×10 обязательно останется целиком белый квадрат 3×3 со сторонами, идущими по линиям сетки?*

Ответ: 5

2.5. *При каком наибольшем k можно утверждать, что при любой покраске в чёрный цвет k клеток белого прямоугольника 8×18 обязательно останется целиком белый квадрат 4×4 со сторонами, идущими по линиям сетки?*

Ответ: 7

3.1. *Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Одновременно с ним из B в A выехал велосипедист. Через час пешеход находился от велосипедиста в 3 раза дальше, чем от пункта A. Еще через 30 мин произошла их встреча, после которой оба продолжили путь. Сколько часов занял путь пешехода от A до B?*

Ответ: 9

Решение. Пусть расстояние от A до B равно 1 км, пешеход двигается со скорость x км/ч, велосипедист — y км/ч. Тогда за час пешеход прошел x км, велосипедист проехал y км, и расстояние между ними равно $1-x-y$, что должно быть в 3 раза больше x. Следовательно, $3x = 1-x-y$, $y = 1-4x$. За следующие полчаса они вместе преодолеют $1-x-y$ км. Так как скорость их сближения равна $x+y$, получаем уравнение $\frac{1}{2}(x+y) = 1-x-y$, откуда $x+y = \frac{2}{3}$. Подставляем в последнее уравнение $y = 1-4x$: $1-3x = \frac{2}{3}$, $x = \frac{1}{9}$. Следовательно, пешеходу потребуется 9 часов, чтобы преодолеть расстояние от A до B.

3.2. *Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Одновременно с ним из B в A выехал велосипедист. Через час пешеход находился от велосипедиста в 6 раза дальше, чем от пункта A. Еще через 1 час 30 мин произошла их встреча, после которой оба продолжили путь. Сколько часов занял путь пешехода от A до B?*

Ответ: 10

3.3. *Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Одновременно с ним из B в A выехал велосипедист. Через 2 часа пешеход находился от велосипедиста в 3 раза дальше, чем от пункта A. Еще через час произошла их встреча, после которой оба продолжили путь. Сколько часов занял путь пешехода от A до B?*

Ответ: 18

3.4. *Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Одновременно с ним из B в A выехал велосипедист. Через 2 часа пешеход находился от велосипедиста в 5 раз дальше, чем от пункта A. Еще через два часа произошла их встреча, после которой оба продолжили путь. Сколько часов занял путь велосипедиста от B до A?*

Ответ: 2,5

3.5. *Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Одновременно с ним из B в A выехал велосипедист. Через час пешеход находился от велосипедиста в 4 раза дальше, чем от пункта A. Еще через 40 мин произошла их встреча, после которой оба продолжили путь. Сколько часов занял путь велосипедиста от B до A?*

Ответ: 2

4.1. *Петя написал на доске натуральное число A. Если его умножить на 8, то получится квадрат натурального числа. А сколько существует таких трёхзначных чисел B, для которых $A \cdot B$ тоже является квадратом натурального числа?*

Ответ: 15

Решение. Если $8A$ — квадрат натурального числа, то любое простое число, большее 2, входит в A в четной степени, а двойка — в нечетной. Значит и в B любое простое число, большее 2, должно входить в четной степени, а двойка — в нечетной, то есть B должно иметь вид $2x^2$. Следовательно, нам надо найти количество таких x, что $2x^2$ — трехзначное. Другими словами, $1000 > 2x^2 \geqslant 100$, $500 > x^2 \geqslant 50$. Подойдут x от 8 до 22, их $22 - 7 = 15$.

4.2. *Петя написал на доске натуральное число A. Если его умножить на 27, то получится квадрат натурального числа. А сколько существует таких трёхзначных чисел B, для которых $A \cdot B$ тоже является квадратом натурального числа?*

Ответ: 13

4.3. *Петя написал на доске натуральное число A. Если его умножить на 5, то получится квадрат натурального числа. А сколько существует таких трёхзначных чисел B, для которых $A \cdot B$ тоже является квадратом натурального числа?*

Ответ: 10

4.4. *Петя написал на доске натуральное число A. Если его умножить на 12, то получится квадрат натурального числа. А сколько существует таких натуральных чисел $1000 \leqslant B \leqslant 2000$, для которых $A \cdot B$ тоже является квадратом натурального числа?*

Ответ: 7

4.5. *Петя написал на доске натуральное число A. Если его умножить на 14, то получится квадрат натурального числа. А сколько существует таких трёхзначных чисел B, для которых $A \cdot B$ тоже является квадратом натурального числа?*

Ответ: 6

5.1. *Сколько существует шестизначных чисел, состоящих только из цифр 1 и 2, если известно, что каждая из них встречается?*

Ответ: 62

Решение. Всего существует $64 = 2^6$ шестизначных числа, состоящих из цифр 1 и 2, так как есть 6 позиций и на каждую из них по два варианта поставить цифру. Но два числа — состоящее только из единиц и состоящее только из двоек — не удовлетворяют условию, поэтому остается 62 числа.

5.2. *Сколько существует пятизначных чисел, состоящих только из цифр 5 и 6, если известно, что каждая из них встречается?*

Ответ: 30

5.3. *Сколько существует семизначных чисел, состоящих только из цифр 3 и 8, если известно, что каждая из них встречается?*

Ответ: 126

5.4. *Сколько существует шестизначных чисел, состоящих только из цифр 7 и 8, причём 8 обязательно встречается?*

Ответ: 63

5.5. *Сколько существует семизначных чисел, состоящих только из цифр 8 и 9, причём 8 обязательно встречается?*

Ответ: 127

6.1. *Монеты бывают номиналов 50 копеек, 1 рубль, 2 рубля, 5 рублей, 10 рублей. В кошельке лежит несколько монет. Известно, что какие бы 20 монет ни вытащить из кошелька, среди них будет хотя бы одна рублёвая, хотя бы одна двухрублёвая и хотя бы одна пятирублёвая. При каком наибольшем количестве монет в кошельке такое возможно?*

Ответ: 28

Решение. Пример: 9 монет по 1 рублю, 9 монет по 2 рубля, 9 монет по 5 рублей и 1 монета по 10 рублей. Заметим, что в кошельке всего 9+9+1=19 монет достоинством не 1 рубль, поэтому среди любых 20 монет обязательно встретится рублевая. Аналогично проверяется и про все остальные номиналы.

Оценка: Предположим, что в кошельке лежит x монет. Так как монет достоинством не 1 рубль не больше 19 (иначе нашлось бы 20 монет, не содержащих рублевую), рублевых монет должно быть не менее $x-19$. Аналогично двухрублевых и пятирублевых. Следовательно, всего монет не менее $3(x-19)$. Получаем неравенство $x \geqslant 3x-57$, откуда $57 \geqslant 2x$, $28,5 \geqslant x$. Так как x — целое, оно не превосходит 28.

6.2. *Монеты бывают номиналов 50 копеек, 1 рубль, 2 рубля, 5 рублей, 10 рублей. В кошельке лежит несколько монет. Известно, что какие бы 30 монет ни вытащить из кошелька, среди них будет хотя бы одна двухрублёвая, хотя бы одна пятирублёвая и хотя бы одна десятирублёвая. При каком наибольшем количестве монет в кошельке такое возможно?*

Ответ: 43

6.3. *Монеты бывают номиналов 50 копеек, 1 рубль, 2 рубля, 5 рублей, 10 рублей. В кошельке лежит несколько монет. Известно, что какие бы 26 монет ни вытащить из кошелька, среди них будет хотя бы одна рублёвая, хотя бы одна пятирублёвая и хотя бы одна десятирублёвая. При каком наибольшем количестве монет в кошельке такое возможно?*

Ответ: 37

6.4. *Монеты бывают номиналов 50 копеек, 1 рубль, 2 рубля, 5 рублей, 10 рублей. В кошельке лежит несколько монет. Известно, что какие бы 28 монет ни вытащить из кошелька, среди них будет хотя бы одна рублёвая, хотя бы одна двухрублёвая и хотя бы одна десятирублёвая. При каком наибольшем количестве монет в кошельке такое возможно?*

Ответ: 40

6.5. *Монеты бывают номиналов 50 копеек, 1 рубль, 2 рубля, 5 рублей, 10 рублей. В кошельке лежит несколько монет. Известно, что какие бы 24 монеты ни вытащить из кошелька, среди них будет хотя бы одна рублёвая, хотя бы одна двухрублёвая и хотя бы одна пятирублёвая. При каком наибольшем количестве монет в кошельке такое возможно?*

Ответ: 34

7.1. *В футбольном турнире участвовали 20 команд. Каждая сыграла один матч с каждой. За победу команда получает 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0. После окончания турнира Вася посчитал сумму очков, набранных командами. Получилось 500. Какое количество матчей завершилось вничью?*

Ответ: 70

Решение. Каждая команда сыграла 19 матчей, поэтому всего матчей было сыграно $20 \cdot 19/2 = 190$ (делим пополам, так как каждый матч посчитан дважды). Если бы ничьих не было, то сумма очков была бы равна $3 \cdot 190 = 570$. Каждый ничейный матч приносит в сумму на одно очко меньше, чем матч, закончившийся победой одной из команд (сумма набранных очков равна 2, а не 3). Так как нам надо уменьшить сумму на 70 очков, ничейных матчей должно быть 70.

7.2. *В футбольном турнире участвовали 20 команд. Каждая сыграла один матч с каждой. За победу команда получает 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0. После окончания турнира Вася посчитал сумму очков, набранных командами. Получилось 400. Какое количество матчей завершилось победой одной из команд?*

Ответ: 20

7.3. *В футбольном турнире участвовали 25 команд. Каждая сыграла один матч с каждой. За победу команда получает 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0. После окончания турнира Вася посчитал сумму очков, набранных командами. Получилось 740. Какое количество матчей завершилось вничью?*

Ответ: 160

7.4. *В футбольном турнире участвовали 40 команд. Каждая сыграла один матч с каждой. За победу команда получает 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0. После окончания турнира Вася посчитал сумму очков, набранных командами. Получилось 1800. Какое количество матчей завершилось победой одной из команд?*

Ответ: 240

7.5. *В футбольном турнире участвовали 40 команд. Каждая сыграла один матч с каждой. За победу команда получает 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0. После окончания турнира Вася посчитал сумму очков, набранных командами. Получилось 2000. Какое количество матчей завершилось вничью?*

Ответ: 340

8.1. *Действительное число* a *таково, что* $2a - 1/a = 3$. *Чему равно* $16a^4 + 1/a^4$*?*

Ответ: 161

Решение. Возведя равенство из условия в квадрат, получим $4a^2 - 4 + 1/a^2 = 9$, то есть $4a^2 + 1/a^2 = 13$. Ещё раз возводим в квадрат и получаем $16a^4 + 8 + 1/a^4 = 169$. Следовательно, $16a^4 + 1/a^4 = 161$.

8.2. *Действительное число* b *таково, что* $b - 2/b = 5$. *Чему равно* $b^4 + 16/b^4$*?*

Ответ: 833

8.3. *Действительное число* x *таково, что* $3x - 1/x = 3$. *Чему равно* $81x^4 + 1/x^4$*?*

Ответ: 207

8.4. *Действительное число* y *таково, что* $y - 3/y = 5$. *Чему равно* $y^4 + 81/y^4$*?*

Ответ: 943

8.5. *Действительное число* z *таково, что* $2z - 1/z = 4$. *Чему равно* $16z^4 + 1/z^4$*?*

Ответ: 392