

**Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике для 7 класса, 2021-2022 учебный год.**

**1.1.** Произведение 3 целых чисел равно -5. Какие значения может принимать их сумма? Обязательно укажите все варианты.

**Ответ:** 5 или -3 или -7

**Решение.** Так как 5 не делится ни на какое другое число, кроме 1 и самого себя, то единственные три множителя, дающие в произведении 5, это 1, 1 и 5. Так как знак произведения отрицательный, то или какое-то одно, или все три числа отрицательные. Получаем следующие варианты:  $1 + 1 - 5 = -3$ ;  $1 - 1 + 5 = 5$ ;  $-1 - 1 - 5 = -7$ .

**1.2.** Произведение 3 целых чисел равно -7. Какие значения может принимать их сумма? Обязательно укажите все варианты.

**Ответ:** -5 или 7 или -9

**1.3.** Произведение 3 целых чисел равно -17. Какие значения может принимать их сумма? Обязательно укажите все варианты.

**Ответ:** -15 или 17 или -19

**1.4.** Произведение 3 целых чисел равно -11. Какие значения может принимать их сумма? Обязательно укажите все варианты.

**Ответ:** -9 или 11 или -13

**1.5.** Произведение 3 целых чисел равно -13. Какие значения может принимать их сумма? Обязательно укажите все варианты.

**Ответ:** -11 или 13 или -15

**2.1.** Петя выписывает на доску такие различные трехзначные натуральные числа, что каждое из них делится нацело на 3, а первые две цифры отличаются на 2. Какое наибольшее количество таких чисел он может выписать, если они заканчиваются на 6 или на 7?

**Ответ:** 9

**Решение.** Число делится на 3, если сумма цифр кратна 3. Если число оканчивается на 6, то сумма двух других цифр дает в остатке 0 при делении на 3. Такие числа: 2, 4 и 4, 2; 5, 7 и 7, 5. Если число оканчивается на 7, то сумма двух других цифр дает в остатке 2 при делении на 3. Такие числа: 2, 0; 3, 5 и 5, 3; 6, 8 и 8, 6. Всего получается 9 чисел: 246, 426, 576, 756, 207, 357, 537, 687, 867.

**2.2.** Петя выписывает на доску такие различные трехзначные натуральные числа, что каждое из них делится нацело на 3, а первые две цифры отличаются на 3. Какое наибольшее количество таких чисел он может выписать, если они заканчиваются на 4 или на 5?

**Ответ:** 8

**2.3.** Петя выписывает на доску такие различные трехзначные натуральные числа, что каждое из них делится нацело на 3, а первые две цифры отличаются на 4. Какое наибольшее количество таких чисел он может выписать, если они заканчиваются на 4 или на 5?

**Ответ:** 7

**2.4.** Петя выписывает на доску такие различные трехзначные натуральные числа, что каждое из них делится нацело на 3, а первые две цифры отличаются на 4. Какое наибольшее количество таких чисел он может выписать, если они заканчиваются на 8 или на 9?

**Ответ:** 7

**2.5.** Петя выписывает на доску такие различные трехзначные натуральные числа, что каждое из них делится нацело на 3, а первые две цифры отличаются на 2. Какое наибольшее количество таких чисел он может выписать, если они заканчиваются на 3 или на 4?

**Ответ:** 9

**3.1.** Каждый час между двумя соседними кустами крапивы в ряду вырастает еще два таких же. Сколько кустов вам нужно посадить изначально, чтобы через три часа всех кустов вместе стало 190?

**Ответ:** 8

**Решение.** Если в данный момент имеется  $n$  кустов, то на следующем ходе их количество увеличивается на  $2(n-1)$ . Так, если через 3 часа всех кустов должно быть 190, то за час до этого их должно быть  $\frac{190-1}{3} + 1 = 64$ . Еще за час  $\frac{64-1}{3} + 1 = 22$ . И на следующем ходу  $\frac{22-1}{3} + 1 = 8$ .

**3.2.** Каждый час между двумя соседними кустами крапивы в ряду вырастает еще два таких же. Сколько кустов вам нужно посадить изначально, чтобы через три часа всех кустов вместе стало 217?

**Ответ:** 9

**3.3.** Каждый час между двумя соседними кустами крапивы в ряду вырастает еще два таких же. Сколько кустов вам нужно посадить изначально, чтобы через три часа всех кустов вместе стало 244?

**Ответ:** 10

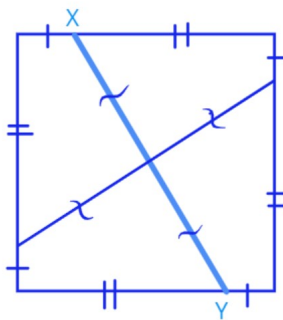
**3.4.** Каждый час между двумя соседними кустами крапивы в ряду вырастает еще четыре таких же. Сколько кустов вам нужно посадить изначально, чтобы через два часа всех кустов вместе стало 201?

**Ответ:** 9

**3.5.** Каждый час между двумя соседними кустами крапивы в ряду вырастает еще пять таких же. Сколько кустов вам нужно посадить изначально, чтобы через два часа всех кустов вместе стало 253?

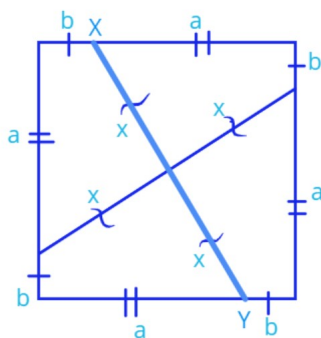
**Ответ:** 8

4.1. Квадратный торт периметром 100 см поделили двумя прямолинейными разрезами на четыре одинаковых кусочка, каждый периметром 56 см. На картинке изображён торт, разрезы и отмечены равные отрезки. Чему равна длина разреза XY?

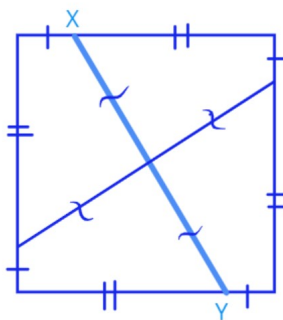


Ответ: 31

Решение. Как видно из рисунка, все четыре маленьких четырехугольника состоят из одних и тех же отрезков. Периметр каждого из них равен  $a + b + 2x = 56$ . Периметр всего квадрата  $4(a + b) = 100$ , откуда  $a + b = 25$ . Тогда  $a + b + 2x = 56$ ,  $25 + 2x = 56$ ,  $2x = 31$ .

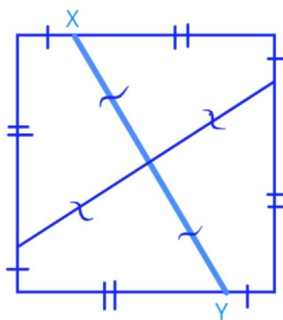


4.2. Квадратный торт периметром 100 см поделили двумя прямолинейными разрезами на четыре одинаковых кусочка, каждый периметром 58 см. На картинке изображён торт, разрезы и отмечены равные отрезки. Чему равна длина разреза XY?



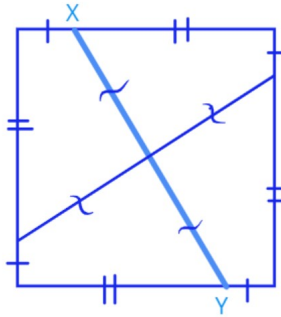
Ответ: 33

4.3. Квадратный торт периметром 100 см поделили двумя прямолинейными разрезами на четыре одинаковых кусочка, каждый периметром 60 см. На картинке изображён торт, разрезы и отмечены равные отрезки. Чему равна длина разреза XY?



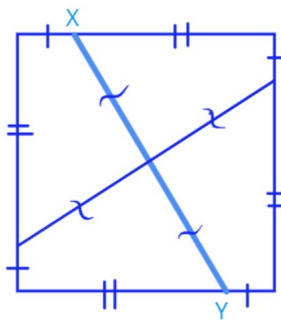
Ответ: 35

4.4. Квадратный торт периметром 100 см поделили двумя прямолинейными разрезами на четыре одинаковых кусочка, каждый периметром 62 см. На картинке изображён торт, разрезы и отмечены равные отрезки. Чему равна длина разреза XY?



Ответ: 37

4.5. Квадратный торт периметром 100 см поделили двумя прямолинейными разрезами на четыре одинаковых кусочка, каждый периметром 64 см. На картинке изображён торт, разрезы и отмечены равные отрезки. Чему равна длина разреза XY?



Ответ: 39

**5.1.** 40 человек пришли в комнату, в которой находились 40 стульев черного и белого цвета, и сели на них. Все они сказали, что сидят на черных стульях. Потом они как-то пересели и ровно 16 заявило, что они сидят на белом стуле. Каждый из сидящих при этом либо оба раза соврал, либо оба раза сказал правду. Сколько при этом во второй раз было тех, кто соврал и сидел на черном стуле?

**Ответ:** 8

**Решение.** Изначально все, кто сказал правду, сидели на черных стульях, и все, кто сказал ложь - на белых. После этого какая-то часть поменялась стульями - и 16 заявило, что сидят на белых. Очевидно, сюда входят те, кто сказал правду и сидел на белых, и те, с кем они поменялись - они сказали ложь и сидели на черных. Так как их число равно, то ровно половина из них - соврали и сидели на черном стуле, то есть 8.

**5.2.** 40 человек пришли в комнату, в которой находились 40 стульев черного и белого цвета, и сели на них. Все они сказали, что сидят на черных стульях. Потом они как-то пересели и ровно 10 заявило, что они сидят на белом стуле. Каждый из сидящих при этом либо оба раза соврал, либо оба раза сказал правду. Сколько при этом во второй раз было тех, кто соврал и сидел на черном стуле?

**Ответ:** 5

**5.3.** 40 человек пришли в комнату, в которой находились 40 стульев черного и белого цвета, и сели на них. Все они сказали, что сидят на черных стульях. Потом они как-то пересели и ровно 12 заявило, что они сидят на белом стуле. Каждый из сидящих при этом либо оба раза соврал, либо оба раза сказал правду. Сколько при этом во второй раз было тех, кто соврал и сидел на черном стуле?

**Ответ:** 6

**5.4.** 40 человек пришли в комнату, в которой находились 40 стульев черного и белого цвета, и сели на них. Все они сказали, что сидят на черных стульях. Потом они как-то пересели и ровно 18 заявило, что они сидят на белом стуле. Каждый из сидящих при этом либо оба раза соврал, либо оба раза сказал правду. Сколько при этом во второй раз было тех, кто соврал и сидел на черном стуле?

**Ответ:** 9

**5.5.** 40 человек пришли в комнату, в которой находились 40 стульев черного и белого цвета, и сели на них. Все они сказали, что сидят на черных стульях. Потом они как-то пересели и ровно 14 заявило, что они сидят на белом стуле. Каждый из сидящих при этом либо оба раза соврал, либо оба раза сказал правду. Сколько при этом во второй раз было тех, кто соврал и сидел на черном стуле?

**Ответ:** 7

**6.1.** На кольцевой дороге три города:  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Известно, что путь из  $A$  в  $C$  в 3 раза длиннее по дуге, не содержащей  $B$ , чем через  $B$ . Путь из  $B$  в  $C$  в 4 раза короче по дуге, не содержащей  $A$ , чем через  $A$ . Во сколько раз путь из  $A$  в  $B$  короче по дуге, не содержащей  $C$ , чем через  $C$ ?

**Ответ:** 19

**Решение.** Из условия задачи следует соотношение:

$$x = 3(y + z)$$

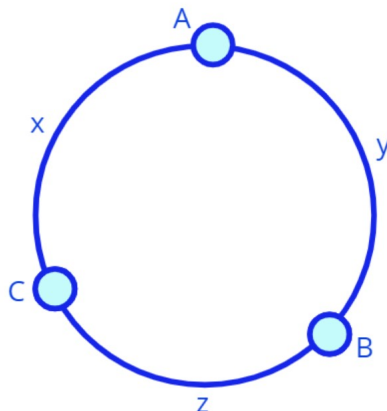
$$4z = x + y$$

$$3y + 3z = 4z - y$$

$$4y = z$$

$$x = 15y$$

$$x + z = 19y.$$



**6.2.** На кольцевой дороге три города:  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Известно, что путь из  $A$  в  $C$  в 4 раза длиннее по дуге, не содержащей  $B$ , чем через  $B$ . Путь из  $B$  в  $C$  в 5 раза короче по дуге, не содержащей  $A$ , чем через  $A$ . Во сколько раз путь из  $A$  в  $B$  короче по дуге, не содержащей  $C$ , чем через  $C$ ?

**Ответ:** 29

**6.3.** На кольцевой дороге три города:  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Известно, что путь из  $A$  в  $C$  в 2 раза длиннее по дуге, не содержащей  $B$ , чем через  $B$ . Путь из  $B$  в  $C$  в 3 раза короче по дуге, не содержащей  $A$ , чем через  $A$ . Во сколько раз путь из  $A$  в  $B$  короче по дуге, не содержащей  $C$ , чем через  $C$ ?

**Ответ:** 11

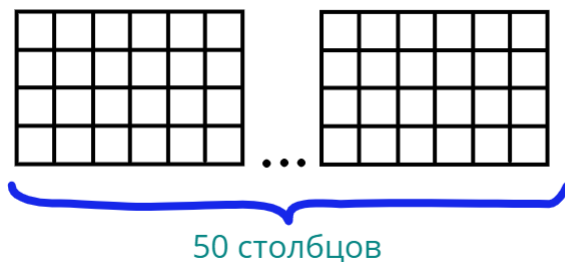
**6.4.** На кольцевой дороге три города:  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Известно, что путь из  $A$  в  $C$  в 5 раз длиннее по дуге, не содержащей  $B$ , чем через  $B$ . Путь из  $B$  в  $C$  в 6 раз короче по дуге, не содержащей  $A$ , чем через  $A$ . Во сколько раз путь из  $A$  в  $B$  короче по дуге, не содержащей  $C$ , чем через  $C$ ?

**Ответ:** 41

**6.5.** На кольцевой дороге три города:  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Известно, что путь из  $A$  в  $C$  в 6 раз длиннее по дуге, не содержащей  $B$ , чем через  $B$ . Путь из  $B$  в  $C$  в 7 раз короче по дуге, не содержащей  $A$ , чем через  $A$ . Во сколько раз путь из  $A$  в  $B$  короче по дуге, не содержащей  $C$ , чем через  $C$ ?

**Ответ:** 55

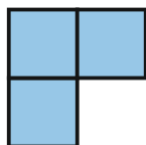
7.1. Антон закрашивает какую-то ячейку в прямоугольнике  $4 \times 50$ . Затем он снова выбирает незакрашенную ячейку, соседствующую по стороне не более чем с одной уже закрашенной ячейкой, и так далее. Какое наибольшее число ячеек может быть закрашено?



**Ответ:** 150

*Оценка*

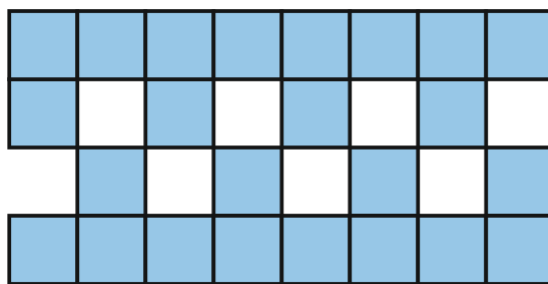
Разобьем весь прямоугольник на 50 квадратов  $2 \times 2$ . В каждом таком квадрате можно покрасить не более 3х ячеек.



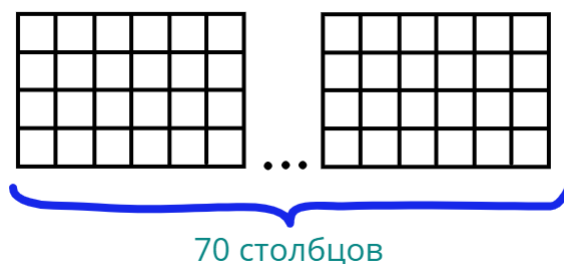
Тогда всего можно покрасить на более  $3 * 50 = 150$  ячеек.

*Пример*

Покрасим последовательно весь верхний и весь нижний ряд. Два средних покрасим в шахматном порядке.

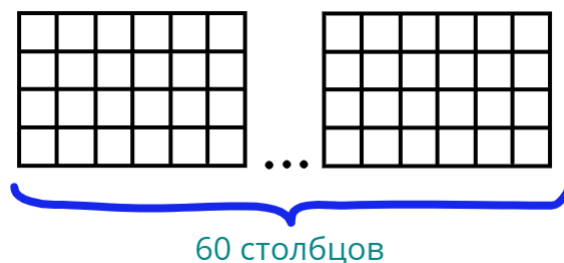


7.2. Антон закрашивает какую-то ячейку в прямоугольнике  $4 \times 70$ . Затем он снова выбирает незакрашенную ячейку, соседствующую по стороне не более чем с одной уже закрашенной ячейкой, и так далее. Какое наибольшее число ячеек может быть закрашено?



**Ответ:** 210

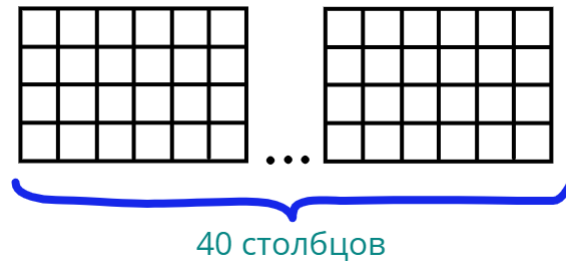
7.3. Антон закрашивает какую-то ячейку в прямоугольнике  $4 \times 60$ . Затем он снова выбирает незакрашенную ячейку, соседствующую по стороне не более чем с одной уже закрашенной ячейкой, и так далее. Какое наибольшее число ячеек может быть закрашено?





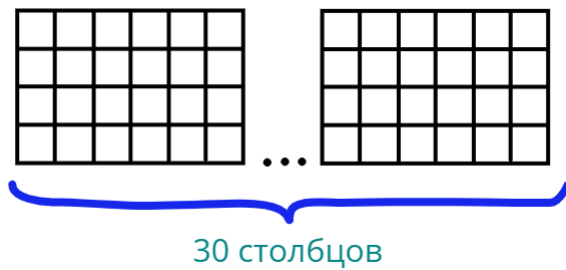
Ответ: 180

7.4. Антон закрашивает какую-то ячейку в прямоугольнике  $4 \times 40$ . Затем он снова выбирает незакрашенную ячейку, соседствующую по стороне не более чем с одной уже закрашенной ячейкой, и так далее. Какое наибольшее число ячеек может быть закрашено?



Ответ: 120

7.5. Антон закрашивает какую-то ячейку в прямоугольнике  $4 \times 30$ . Затем он снова выбирает незакрашенную ячейку, соседствующую по стороне не более чем с одной уже закрашенной ячейкой, и так далее. Какое наибольшее число ячеек может быть закрашено?

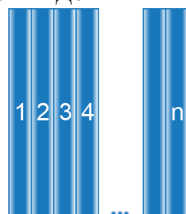


Ответ: 90

**8.1.** На книжной полке у Федора стоят тома сочинений различных авторов. Когда приятель взял у него почитать два тома Пушкина, Федор заметил, что из оставшихся он прочитал целиком не менее половины книг. После того, как приятель вернул два тома Пушкина и взял почитать два тома Лермонтова, Федор понял, что из оставшихся он целиком прочитал менее одной трети томов. Какое наибольшее число томов могло находиться на полке у Федора?

**Ответ:** 12

**Решение.** Пронумеруем все книги Федора от 1 до  $n$ .



Пусть первые два тома - тома Пушкина,  $s_1$  - число прочитанных из них Федором; последние два - тома Лермонтова,  $s_2$  - число прочитанных из них Федором.  $S$  - число прочитанных томов среди книг с 3й по  $n - 2$ .

Согласно условию,

$$S + s_2 \geq \frac{n-2}{2}, S + s_1 < \frac{n-2}{3},$$

$$3S + 3s_1 < n - 2 \leq 2S + 2s_2,$$

$$3S + 3s_1 < 2S + 2s_2,$$

$$S < 2s_2 - 3s_1 \leq 4,$$

Значит,  $S$  не превосходит 3. Тогда наибольшее возможное  $S = 3$ . Отсюда  $n \leq 12$ . Пример на 12 (1 - прочитал, 0 - не прочитал): 001110000011.

**8.2.** На книжной полке у Федора стоят тома сочинений различных авторов. Когда приятель взял у него почитать три тома Пушкина, Федор заметил, что из оставшихся он прочитал целиком не менее половины книг. После того, как приятель вернул три тома Пушкина и взял почитать три тома Лермонтова, Федор понял, что из оставшихся он целиком прочитал менее одной трети томов. Какое наибольшее число томов могло находиться на полке у Федора?

**Ответ:** 19

**8.3.** На книжной полке у Федора стоят тома сочинений различных авторов. Когда приятель взял у него почитать три тома Пушкина, Федор заметил, что из оставшихся он прочитал целиком более половины книг. После того, как приятель вернул три тома Пушкина и взял почитать три тома Лермонтова, Федор понял, что из оставшихся он целиком прочитал не более одной трети томов. Какое наибольшее число томов могло находиться на полке у Федора?

**Ответ:** 18

**8.4.** На книжной полке у Федора стоят тома сочинений различных авторов. Когда приятель взял у него почитать два тома Пушкина, Федор заметил, что из оставшихся он прочитал целиком более половины книг. После того, как приятель вернул два тома Пушкина и взял почитать два тома Лермонтова, Федор понял, что из оставшихся он целиком прочитал не более одной трети томов. Какое наибольшее число томов могло находиться на полке у Федора?

**Ответ:** 11

**8.5.** На книжной полке у Федора стоят тома сочинений различных авторов. Когда приятель взял у него почитать два тома Пушкина, Федор заметил, что из оставшихся он прочитал целиком не менее трети книг. После того, как приятель вернул два тома Пушкина и взял почитать два тома Лермонтова, Федор понял, что из оставшихся он целиком прочитал менее одной четверти томов. Какое наибольшее число томов могло находиться на полке у Федора?

**Ответ:** 23