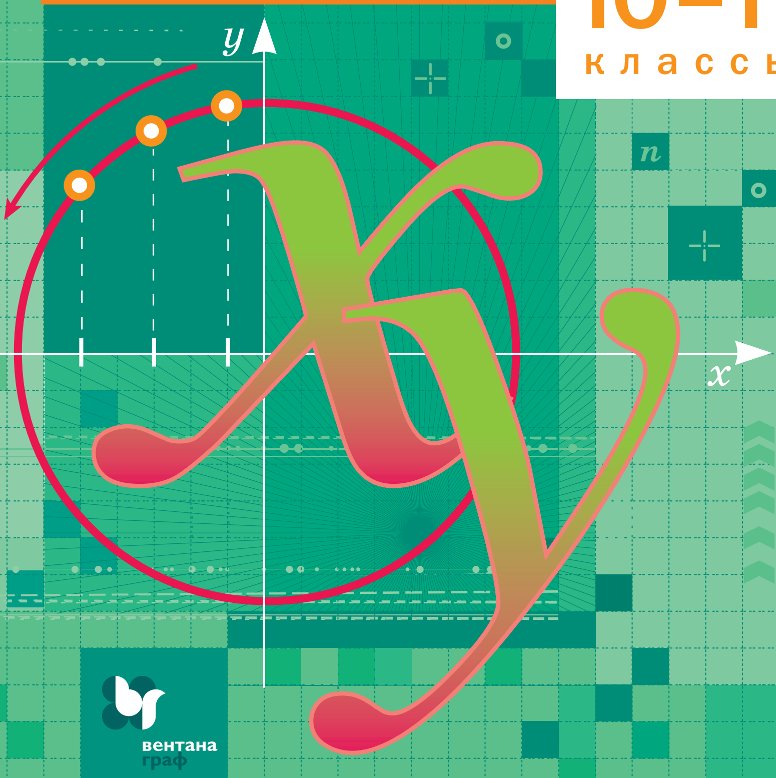
РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

к линии А.Г. Мордковича, П.В. Семёнова, Л.А. Александровой

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ

10–11 классы



вентана граф

Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

к линии УМК А.Г. Мордковича, П.В. Семёнова, Л.А. Александровой

Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

10–11 классы

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ

Москва
Издательский центр
«Вентана-Граф»
2017

УДК 373.5.016:512
ББК 74.262.21
М79

Мордкович, А. Г.

М79 Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень : 10—11 классы : рабочая программа к линии УМК А. Г. Мордковича, П. В. Семёнова, Л. А. Александровой / А. Г. Мордкович, П. В. Семёнов, Л. А. Александрова. — М. : Вентана-Граф, 2017. — 38 с.

ISBN 978-5-360-08694-9

В первой части данного пособия излагается общая концепция курса алгебры и начал математического анализа, реализованная в учебниках 7—11 А. Г. Мордковича, П. В. Семёнова, Л. А. Александровой. Вторая часть — рабочая программа, которая включает содержание курса алгебры и начал математического анализа 10—11 классов, примерные результаты обучения и тематическое планирование.

Рабочая программа соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту и Примерной основной образовательной программе среднего (полного) образования, утверждённой 28 июня 2016 г.

УДК 373.5.016:512
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-360-08694-9

О данном пособии

В первой части данного пособия излагается общая концепция курса алгебры и начал математического анализа, реализованная в наших учебниках 7–11. Внимательный читатель увидит полное соответствие нашей концепции основным положениям и требованиям Федерального государственного образовательного стандарта.

Вторая часть пособия содержит рабочую программу, включающую содержание курса, примерное поурочное планирование и предметные результаты обучения.

Концепция курса алгебры и начал математического анализа для общеобразовательной школы

Исходные положения нашей концепции можно сформулировать в виде двух тезисов:

1. *Математика в школе — не наука и даже не основы науки, а учебный предмет.*

2. *Математика в школе — гуманитарный учебный предмет.*

Обсудим первый тезис. Не так давно считалось, что главное в школьном обучении — повысить так называемую научность, что в конечном итоге свелось к перекосу в сторону формализма и схоластики, к бессмысленному заучиванию формул. Когда педагогическая общественность начала это осознавать, стало крепнуть (хотя и не без борьбы) представление о том, что школьная математика не наука, а учебный предмет со всеми вытекающими отсюда последствиями. В учебном предмете необязательно соблюдать законы математики как науки (например, такие: всё начинается с аксиом, нельзя начинать изучение теории без строгого определения основного понятия, все утверждения надо доказывать и т. д.), зачастую более важны законы педагогики и особенно психологии, постулаты теории развивающего обучения. В этой связи остановимся на одном из самых трудных моментов в преподавании — введении определений (*как и когда* вводить то или иное сложное математическое понятие) и на выборе уровня строгости изложения в школьном курсе математики. Начнём с определений.

Если основная задача учителя — обучение, то он имеет право давать формальное определение любого понятия тогда, когда считает нужным. Если основная задача учителя — развитие, то следует продумать выбор места и времени (*стратегия*) и этапы постепенного подхода к формальному определению на основе предварительного изучения понятия на более простых уровнях (*тактика*). Таких уровней в математике можно назвать три: *нагляд-*

но-интуитивный, когда новое понятие вводится с опорой на интуитивные или образные представления учащихся; *рабочий* (*описательный*), когда от учащегося требуется уметь отвечать не на вопрос «Что такое...», а на вопрос «Как ты понимаешь, что такое...»; *формальный*. Стратегия введения определений сложных математических понятий в наших учебниках базируется на положении о том, что выходить на формальный уровень следует при выполнении двух условий:

1) если у учащихся накопился достаточный опыт для адекватного восприятия вводимого понятия, причём опыт по двум направлениям: *вербальный* (опыт полноценного понимания всех слов, содержащихся в определении) и *генетический* (опыт использования понятия на наглядно-интуитивном и рабочем уровнях);

2) если у учащихся появилась потребность в формальном определении понятия.

Что касается генетического опыта, то следует чаще обращаться к истории математики. То или иное понятие математики практически всегда проходило в своём становлении три указанные выше стадии (наглядное представление, рабочий уровень восприятия, формальное определение), причём переход с уровня на уровень зачастую был весьма болезненным и длительным по времени. Не учитывать этого нельзя в силу своеобразного «закона сохранения сложности»: если формирование раздела науки, понятия, утверждения и т. п. в реальной истории науки было долгим и сложным, а временами, быть может, и мучительным, то и при обучении излишняя простота изложения психологически дезориентирует учащихся, создавая ненужную иллюзию лёгкости. Школьникам нужно дать время хотя бы приблизительно, но пережить эту нетривиальность, деятельностно почувствовать её, не спеша переходить с уровня на уровень.

Рассмотрим в качестве примера формирование понятия равносильности уравнений в нашем курсе 7–11. В 7 классе о равносильности уравнений и о равносильных преобразованиях уравнения речи вообще не идёт, хотя, разумеется, решаются уравнения (линейные и даже некоторые квадратные) и системы линейных уравнений. Почему? Да потому что в рассматриваемом блоке уравнений неравносильных преобразований не бывает, следовательно, нет никакой потребности во введении специального термина, да и опыт приобретать не на чем. В начале 8 класса при изучении алгебраических дробей даются первые представления о рациональных уравнениях и, в частности, о том, что при их решении могут появиться посторонние корни, а потому обязательна проверка. Но термин «равносильность» ещё не вводится (мало опыта). Во втором полугодии 8 класса решаются рациональные уравнения и простейшие иррациональные уравнения. Обнаруживается, что посторонние корни могут появиться не только за счёт освобождения от знаменателей, но и за счёт возведения обеих частей уравнения в квадрат. Вот теперь ученики накопили необходимый опыт и ощутили потребность в его осмыслении, значит, именно здесь настал благоприятный момент для введения таких понятий, как «равносильность уравнений», «равносильные» и «неравносильные их преобразования», «посторонние корни» и «проверка корней». Эта линия продолжается в 10 классе при решении показательных и логарифмических уравнений. А общий итоговый разговор о равносильных и неравносильных преобразованиях уравнений, о проверке корней и отсеве посторонних корней, о причинах потери корней при решении уравнений отложен до последней главы учебника для 11 класса.

Подчеркнём, что новый математический термин и новое обозначение должны появляться мотивированно, тогда, когда в них возникает необходимость — в первую очередь в связи с появлением новой математической модели. Немотивированное введение нового термина провоцирует запоминание (компонент обучения) без понимания (и, следовательно, без развития).

Несколько слов о выборе уровня строгости в учебном предмете. В отличие от науки, в учебном предмете мы не обязаны всё доказывать. Более того, в ряде случаев правдоподобные рассуждения или рассуждения, опирающиеся на графические модели, на интуицию, имеют для школьников более весомую развивающую и гуманитарную ценность, чем формальные доказательства. В нашем курсе всё, что входит в программу, что имеет воспитательную ценность и доступно учащимся, доказывается. Если формальные доказательства мало поучительны и схоластичны, они заменяются правдоподобными рассуждениями (в основном это относится к изучению элементов математического анализа). Наше кредо: с одной стороны, *меньше схоластики, меньше формализма, меньше «жёстких моделей», меньше опоры на левое полушарие мозга*; с другой стороны, *больше геометрических иллюстраций, больше наглядности, больше правдоподобных рассуждений, больше «мягких моделей», больше опоры на правое полушарие мозга*. Преподавать в постоянном режиме жёсткого моделирования — легко, использовать в преподавании режим мягкого моделирования — трудно; первый режим — удел ремесленников от педагогики, второй режим — удел творцов. Подробнее мы поговорим об этом ниже, при обсуждении методических особенностей нашего изложения элементов математического анализа в школе.

Обсудим теперь <u>второй тезис</u>. Математика — гуманитарный (общекультурный) предмет, который позволяет субъекту правильно ориентироваться в окружающей действительности и «ум в порядок приводит». Раскроем, в чём мы видим гуманитарный (общекультурный) потенциал школьного курса алгебры и начал математического анализа.

Естественным этапом развития познания, на котором осуществляется переход от содержательного и качественного анализа объекта к формализации и количественному анализу, является математическое моделирование реальных процессов. Математическое моделирование — основа происходящей в настоящее время математизации научных знаний и, кроме того, важный этап познания: математические модели соответствуют понятию отражения в диалектической теории познания. Поэтому одной из основных задач школьного математического образования является ознакомление учащихся с соотношениями между явлениями реального или проектируемого мира и его математическими моделями, практическое их обучение построению математических моделей, объяснение им того, что абстрактная математическая модель, в которой отброшено всё несущественное, позволяет глубже понять суть вещей.

Математика — наука о математических моделях. Модели описываются в математике специфическим языком (термины, обозначения, символы, графики, графы, алгоритмы и т. д.). Значит, надо изучать математический язык, чтобы мы могли работать с любыми математическими моделями. Но учебный предмет, ориентированный на изучение какого-либо языка, обычно считают предметом гуманитарным. Особенно важно при этом подчеркнуть, что основное назначение математического языка — способствовать организации деятельности (тогда как основное назначение обыденного языка — служить средством общения), а это в наше время очень важно для культурного человека. Поэтому в нашем курсе 7—11 *математический язык* и *математическая модель* — ключевые слова в постепенном развёртывании курса, его идейный стержень. При наличии идейного стержня математика предстаёт перед учащимся не как набор разрозненных фактов, которые учитель излагает только потому, что они есть в программе, а как цельная развивающаяся дисциплина *общекультурного характера*. В наше время владение хотя бы азами математического языка — непременный атрибут культурного человека. Поэтому, на наш взгляд, заниматься изучением математического языка и математических моделей надо сегодня как можно раньше, начиная с начальной школы.

Гуманитарный потенциал школьного курса алгебры мы видим, во-первых, в том, что владение математическим языком и математическим моделированием позволит учащемуся лучше ориентироваться в природе и обществе; во-вторых, в том, что математика по своей внутренней природе имеет богатые возможности для воспитания мышления и характера учащихся; в-третьих, в реализации в процессе преподавания идей развивающего и проблемного обучения; в-четвёртых, в том, что уроки математики (при правильной постановке) способствуют развитию речи обучаемого не в меньшей степени, чем уроки русского языка и литературы.

Заметим, что желание способствовать реализации последнего тезиса и привело к тому, что наши учебники написаны весьма подробно, обстоятельно и где-то даже избыточно многословно, вопреки сложившейся в последние годы традиции излагать материал в школьных учебниках математики в телеграфно-инструктивной, информационно-авторитарной манере. Но есть и ещё одна серьёзная причина выбора нами мягкого стиля подачи материала в учебнике как в отдельной книге. Дело в том, что сегодня школа, повторим ещё раз, должна не только обеспечить учащегося необходимыми знаниями, но и организовать формирование самостоятельного деятельностного опыта нахождения, получения и отбора информации. А для этого как минимум необходима привычка, навык самостоятельного чтения и понимания учебных текстов, в первую очередь текстов учебников. Но сухо написанный учебник школьник читать не будет.

В нашем построении школьного курса 7–11 реализованы следующие принципы.

1. *Принцип крупных блоков.* Он выражается в том, что если имеется объективная возможность изучить тот или иной раздел курса алгебры в том или ином классе компактно, без перебивок, без лоскутности, то этой возможностью следует воспользоваться. Так, в курсе 10 класса компактно строится раздел «Тригонометрия», в курсе 11 класса — раздел, посвящённый началам математического анализа.

2. *Принцип детерминированности, логической завершённости построения курса.* Образно выражаясь, программа курса должна быть «некоммутативна», т. е. выстроена так, чтобы темы были, как правило, непереставимы и порядок ходов был понятен учителю.

3. *Принцип завершённости в пределах учебного года.* Опять-таки, образно выражаясь, можно сказать так: школьный курс 7–11 — «пятисерийный (по числу лет из-

учения курса) роман с продолжением»; в каждом конкретном классе изучается определённая серия, имеющая свою внутреннюю интригу и более-менее законченное содержание, причём это содержание может быть кратко охарактеризовано одной-двумя ключевыми фразами. Реализация этого принципа способствует тому, что учащиеся начинают лично осознавать структуру курса. Если не касаться пока стохастической линии курса, то учебник 10 класса посвящён изучению элементарных функций, а учебник 11 класса — изучению элементов математического анализа.

4. *Приоритетность функционально-графической линии.* Математические модели напрямую связаны с функциями, поэтому функции становятся ведущей идеей курса алгебры практически во всех разделах. При этом надо подчеркнуть, что реализуемая в нашей программе концепция изучения функций существенно отличается от традиционной.

Методология новой концепции заключается в следующем: каждый год обучения ориентирован на конкретную модель реальной действительности. Раскроем это положение.

Основная тема 7 класса — линейная функция, что с точки зрения моделирования реальных процессов соответствует равномерным процессам. Основная тема 8 класса — квадратичная функция, моделирующая равноускоренные процессы. Основная тема 10 класса — тригонометрические функции, они моделируют периодические процессы. Во втором полугодии 10 класса появляется показательная функция, моделирующая процессы органического роста. Таким образом, тезис «математика изучает математические модели» наполняется конкретным содержанием: четыре типа основных моделей реальной действительности, изучаемых в школе (на уроках математики, физики, химии и т. п.), чётко разводятся по годам изучения школьного курса алгебры и начал математического анализа.

Приоритетность функционально-графической линии выражается прежде всего в том, что какой бы класс функций, уравнений, выражений ни изучался, построение материала практически всегда осуществляется по жёсткой схеме:

функция — уравнения — преобразования.

Приоритетность функционально-графической линии имеет ярко выраженный психологический подтекст. Известно, что наш мозг состоит из двух полушарий: левое, по образному замечанию академика В. И. Арнольда, отвечает «за умножение многочленов, языки, шахматы и интриги и последовательности силлогизмов, а правое — за пространственную ориентацию, интуицию и всё необходимое в реальной жизни» (В. И. Арнольд. Жёсткие и мягкие математические модели» — М. : МЦНМО, 2000). К сожалению, алгебра в школе преимущественно «левополушарна» из-за засилья в ней формульной части, тогда как дети к началу изучения алгебры в большинстве своём «правополушарны». Налицо противоречие между построением курса и возможностями детей. Приоритет функционально-графической линии сглаживает это противоречие, поскольку активно опирается на возможности правого полушария, создаёт нормальную среду для гармоничной работы обоих полушарий мозга.

Здесь уместно вспомнить высказывание французского психолога I. Solgnier: «Обучая левое полушарие, вы обучаете только левое полушарие. Обучая правое полушарие, вы обучаете весь мозг».

Раскроем методические особенности того, как основные положения нашей концепции изучения функций реализуются в наших учебниках.

1) *Отказ от формулировки определения функции при первом появлении этого понятия.*

Поначалу, пока изучаются простейшие функции (линейная, обратная пропорциональность, квадратичная и пр. — в нашей программе это материал 7–8 классов), следует отказаться от формального определения функции и ограничиться описанием, не требующим заучивания. Ничего страшного в этом нет, о чём свидетельствует и история математики. Многие математические теории строились, развивались и обогащались всё новыми и новыми фактами и приложениями, несмотря на отсутствие определения основного понятия этой теории. Так было в теории пределов (до *О. Коши*), так было в теории действительного числа. Действительными числами оперировали многие века, не имея определения, и лишь в конце XIX в. появилось сразу несколько вариантов определения действительного числа (Р. Дедекинд, К. Вейерштрасс, Г. Кантор). Можно строить теорию, даже достаточно строгую, и при отсутствии строгого определения исходного понятия — во многих случаях это оправдано с методической точки зрения. Определение функции в школе необходимо ввести тогда, когда ученики накопят достаточный опыт в оперировании этим понятием. В нашей программе это предусмотрено в начале 9 класса. На это определение мы и опираемся в курсе алгебры и начал математического анализа 10–11.

2) *Постепенное введение в программу свойств функций, подлежащих изучению, на различных уровнях строгости.*

Перечислим те свойства функций, которые на том или ином уровнях строгости изучаются в различных разделах школьного курса алгебры: область определения, область значений функции, монотонность, чётность, периодичность, непрерывность, выпуклость, ограниченность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения, дифференцируемость. Естественно, учителей всегда беспокоят три вопроса:

— каким из этих понятий нужно дать в школе точное определение, а какие достаточно описать на наглядно-интуитивном или рабочем уровне;

— как и когда давать то или иное формальное определение;

— если точное определение вводится позже первичного использования понятия, то каковы пропедевтика и динамика развития соответствующего понятия?

Эти вопросы далеко не праздные. Главная методическая ошибка — появление указанных свойств функций в более или менее полном объёме практически одновременно при изучении темы «Исследование функций с помощью производной» в 10–11классах, что вызывает понятные затруднения у учащихся (из-за переизбытка информации). Это и педагогическая ошибка. Дело в том, что каждый учитель реализует в своей педагогической деятельности различные программы: интереса, памяти, развития и т. д. Среди них значительное место занимает программа развития речи (включающая, в частности, правильное употребление терминов математического языка). Не следует забывать, что в реальной жизни употребление определённых терминов в речи со смутным их пониманием часто предшествует полноценному пониманию, которое приходит после привыкания к терминам. Поэтому мы считаем не только возможным, но и полезным употребление школьниками, начиная с 7 класса, таких, например, терминов, как «непрерывность функции», «наибольшее и наименьшее значения функции», без знания строгих математических определений этих понятий, что и сделано в нашем учебнике «Алгебра-7». В 8 классе на наглядно-интуитивном уровне мы ввели понятия выпуклости и ограниченности функции. И только в курсе алгебры 9 класса после накопления соответствующего опыта мы выходим на формальный уровень определения таких понятий, как «ограниченность функции», «наименьшее и наибольшее значения функции на промежутке» и т. д. Естественно, в учебниках для 10 и 11 классов все определения, известные из курса алгебры основной школы, напоминаются и добавляются такие свойства, как непрерывность, дифференцируемость и экстремум функции.

Приведём таблицу «стратегии и тактики» изучения свойств функций в нашем курсе алгебры для 7–11 классов. *Стратегия* определяет время введения понятия (класс), а *тактика* — формирование уровней строгости предъявления понятия. В таблице приняты условные обозначения: **Н** — это значит, что соответствующее свойство функции вводится на наглядно-интуитивном уровне; **Р** — это значит, что свойство функции изучается на рабочем уровне, на уровне словесного описания, не загнанного в жёсткую формальную конструкцию; **Ф** — означает формальное определение свойства.

Свойство	Класс			
	7	8	9	10
Область определения	Н	Р	Ф	Ф
Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке	Н	Р	Ф	Ф
Монотонность	Н	Р	Ф	Ф
Непрерывность	Н	Н	Н	Р, Ф
Ограниченность	—	Н, Р	Ф	Ф
Выпуклость	—	Н	Н	Н
Область значений	—	Н, Р	Ф	Ф
Чётность	—	—	Ф	Ф
Периодичность	—	—	Ф	Ф
Дифференцируемость	—	—	—	Н
Экстремумы	—	—	—	Ф

Учитывая, что учащиеся 7–9 классов более восприимчивы к новым математическим понятиям (представленным хотя бы в ознакомительном плане), чем учащиеся 10–11 классов, мы все свойства функций, какие было можно, перенесли в основную школу; в старшей школе впервые появляются лишь два свойства функций (из 11).

3) Для понимания учащимися курса алгебры и начал математического анализа в целом прежде всего важно, чтобы они полноценно усвоили первичные модели (функции). Это значит, что нужно организовать их деятельность по изучению той или иной функции так, чтобы рассмотреть новый объект (конкретную математическую модель — функцию) системно, с различных сторон, в разных ситуациях. В то же время не должно складываться ощущение набора случайных сюжетов, различных для разных классов функций, это создаст ситуацию дискомфорта в обучении. Возникает методическая проблема выделения в системе упражнений по изучению того или иного класса функций *инвариантного ядра, универсального для любого класса функций.*

В наших учебниках такое ядро, инвариантное относительно класса функций, состоит из шести направлений (компонентов):

- графическое решение уравнений (систем уравнений, неравенств);
- отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на заданном промежутке;
- преобразование графиков;
- функциональная символика;
- кусочно-заданные функции;
- чтение графика.

Учащиеся постепенно привыкают к тому, что какой бы новый класс функций они ни изучали, в системе упражнений обязательно будут упражнения, рассредоточенные по указанным шести блокам. Образно выражаясь, это шесть красок, с помощью которых изучаемая математическая модель — функция — становится ёмкой, цельной, понятной, красивой и привычной. Создаётся эффект предсказуемости деятельности, что делает совместную работу учителя и ученика на уроке достаточно комфортной.

Раскроем методические особенности каждого из указанных направлений.

Графическое решение уравнений.

Графический (или, точнее, функционально-графический) метод решения уравнений должен, на наш взгляд, всегда быть первым и одним из главных при решении уравнений любых типов. Неудобства, связанные с применением графического метода, как правило, создают ту проблемную ситуацию, которая приводит к необходимости отыскания алгоритмов аналитических способов решения уравнения. Эта идея проходит у нас красной нитью через весь школьный курс алгебры и начал математического анализа.

Что даёт этот метод для изучения той или иной функции? Он приводит ученика к ситуации, когда график функции строится не ради графика, а для решения другой задачи — для решения уравнения. График функции становится *не целью, а средством*, помогающим решить уравнение. Это способствует и изучению функции, и ликвидации того неприязненного отношения к функциям и графикам, которое, к сожалению, характерно для традиционных способов организации изучения курса алгебры в общеобразовательной школе. В наших учебных пособиях графический способ решения уравнения практически всегда предшествует аналитическим способам. Учащиеся вынуждены применять его, привыкать к нему и относиться как к своему первому помощнику (они, образно выражаясь, обречены на дружбу с графическим методом), поскольку никаких других приёмов решения того или иного уравнения к этому времени не знают. Опыт показывает, что графический метод решения уравнений им нравится, они чувствуют его полезность и красоту и в то же время ощущают проблемность ситуации, вызванной ненадёжностью этого метода решения уравнения.

Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на заданном промежутке.

Начиная с 7 класса мы предлагаем учащимся задания такого типа: найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x + 3$ на отрезке [1; 3]. Предполагается, что учащиеся построят график линейной функции $y = 2x + 3$, выделят часть графика на отрезке [1; 3] и по графику найдут наибольшее и наименьшее значения функции. В чём методическая ценность подобного задания?

Во-первых, это новая «игра» с функцией, когда график нужен не сам по себе, а для ответа на вопрос задачи (опять график — не цель, а средство).

Во-вторых, сами того не осознавая, учащиеся привыкают к оперированию «двухкванторным», т. е. достаточно сложным математическим понятием, восприятие которого требует как определённой подготовки, так и определённого уровня математической культуры.

Преобразование графиков.

Начиная с 8 класса какая бы функция ни изучалась, школьникам предлагается в системе упражнений выполнить то или иное преобразование графика.

Функциональная символика.

Как только в 7 классе появится запись $y = f(x)$, полезно предлагать учащимся примеры, нацеленные на осознание смысла этой записи, примеры на функциональную символику. Опыт показывает, что школьники часто не могут, например, исследовать функцию на чётность не потому, что не знают определений чётной или нечётной функции, а потому, что не понимают смысла записи $f(-x)$. Нередко учащиеся испытывают затруднения с производной также из-за чисто технических трудностей: не понимают смысла записи $f(x + \Delta x)$ и вследствие этого не могут составить выражение для приращения функции даже в достаточно простых случаях. Это означает, что соответствующая работа не была проведена учителем в 7—9 классах. Поэтому считаем полезным включать в учебники и задачники задания следующего типа: для функции $y = f(x)$, где $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$, найти $f(a - 1)$, $f(a + 2)$, $f(3a)$, $f(5x)$, $f(-x)$, $3f(x)$, $f(x^2)$ и т. п.

Кусочно-заданные функции.

Для правильного формирования у учащихся как самого понятия функции, так и представления о методологической сущности этого понятия, полезно делать то, что до недавнего времени отсутствовало в большинстве школьных учебников, о чём забывают и авторы многочисленных методических рекомендаций. Речь идёт о рассмотрении кусочных функций, т. е. функций, заданных различными формулами на разных промежутках области определения. Во многих случаях именно кусочные функции являются математическими моделями реальных ситуаций. Использование таких функций способствует преодолению обычного заблуждения учеников, отождествляющих функцию только с её аналитическим заданием в виде некоторой формулы. В самом деле, чтобы задать функцию, надо указать область её определения $D(f)$ и указать правило f, по которому каждому значению x из множества $D(f)$ сопоставляется определённое значение y. Если учащиеся имели дело с функциями, заданными аналитически одной формулой, заданными с помощью графика и особенно заданными различными формулами на разных промежутках, то они легче воспримут ту тонкость, которая содержится в определении («правило f»); менее вероятно при этом и отождествление ими «правила f» с «формулой f». Использование кусочных функций готовит как в пропедевтическом, так и в мотивационном плане понятие непрерывности. Использование на уроках кусочных функций даёт возможность учителю сделать систему упражнений более разнообразной (что очень существенно для поддержания интереса к предмету у обучаемых), творческой (можно предложить учащимся самим конструировать примеры). Отметим и воспитательный момент: это воспитание умения принять решение, зависящее от правильной ориентировки в условиях, это и своеобразная эстетика — оценка красоты графиков кусочных функций, предложенных разными учениками.

Чтение графика.

В системе упражнений мы регулярно предлагаем учащимся не только построить и прочитать график функции, но и по заданному графику восстановить аналитическое задание функции. Вообще переход от одного вида математической модели (аналитическая, графическая, вербальная) к другому происходит у нас в системе упражнений регулярно.

Программа по алгебре и началам математического анализа для 10–11 классов общеобразовательных учреждений

Содержание курса алгебры и начал математического анализа 10–11 классов (базовый уровень)

10 класс

Тригонометрические функции

Числовая окружность. Числовая окружность в координатной плоскости. Синус, косинус, тангенс, котангенс. Табличные значения тригонометрических функций. Основное тригонометрическое тождество и следствия из него. Тригонометрические функции числового и углового аргументов. Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, их свойства и графики. Периодичность тригонометрических функций. Преобразования графиков тригонометрических функций. *Обратная функция. Обратные тригонометрические функции, их свойства и графики.*

Тригонометрические уравнения

Арккосинус, арксинус, арктангенс, арккотангенс числа. Простейшие тригонометрические уравнения. Методы решения тригонометрических уравнений. *Решение простейших тригонометрических неравенств.*

Преобразование тригонометрических выражений

Формулы приведения. Синус, косинус, тангенс суммы и разности аргументов. Формулы двойного аргумента и понижения степени. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение.

Степени и корни. Степенные функции

Функция $y = \sqrt[n]{x}$, её свойства и график. Свойства корней n-й степени. Степень с любым рациональным показателем. Преобразование иррациональных выражений. Иррациональные уравнения. Степенные функции, их свойства и графики.

Показательные и логарифмические функции

Показательная функция, её свойства и график. Число *e*. Показательные уравнения и неравенства. Логарифм числа. Логарифмическая функция, её свойства и график. Десятичный логарифм. Натуральный логарифм. Основные свойства логарифмов. Преобразование логарифмических выражений. Логарифмические уравнения и неравенства. Переход к новому основанию логарифма.

Вероятность, случайные события, случайные величины

Повторение. Решение задач на табличное и графическое представление данных. Использование свойств и характеристик числовых наборов: средних, наибольшего и наименьшего значения, размаха, дисперсии. Решение задач на определение частоты и вероятность событий. Вычисление вероятностей в опытах с равновозможными элементарными исходами. Решение задач с применением комбинаторики. Решение задач на вычисление вероятностей независимых событий, применение формулы сложения вероятностей.

Вероятности случайных событий. Биномиальные коэффициенты. Формула бинома Ньютона. Биномиальное распределение. Схема Бернулли. Дискретные случайные величины и их таблицы распределений. *Числовые характеристики дискретных случайных величин.*

11 класс

Элементы теории пределов

Числовые последовательности. *Понятие предела числовой последовательности. Предел функции на бесконечности. Предел функции в точке.* Приращение аргумента. Приращение функции.

Производная

Задачи, приводящие к понятию производной. Производная функции в точке. Геометрический и физический смысл производной. Понятие о непрерывных функциях. Правила дифференцирования. Производные элементарных функций. Уравнение касательной.

Исследование функций с помощью производной

Исследование элементарных функций на монотонность и экстремумы. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции с помощью производной. Построение графиков функций с помощью производных. Применение производной при решении задач.

Первообразная и интеграл

Первообразная. Правила отыскания первообразных. Первообразные элементарных функций. Площадь криволинейной трапеции. Формула Ньютона-Лейбница. Определённый интеграл. Вычисление площадей плоских фигур и объёмов тел вращения с помощью интеграла.

Непрерывные распределения вероятностей. Закон больших чисел

Геометрия и вероятность. Равномерное распределение. Приближения в формуле Бернулли. Нормальное распределение. Случайные величины и закон больших чисел.

Уравнения и неравенства

Равносильные и неравносильные уравнения и неравенства. Основные методы решения уравнений. Системы уравнений. Решение неравенств с одной переменной. *Неравенства с модулями. Иррациональные неравенства. Уравнения, системы уравнений с параметром. Текстовые задачи.*

Примерные результаты обучения

Выпускник научится в 7–11 классах (для использования в повседневной жизни и обеспечения возможности продолжения образования):

Элементы теории множеств и математической логики

• Оперировать на базовом уровне понятиями: конечное множество, элемент множества, подмножество, пересечение и объединение множеств, числовые множества на координатной прямой.

• Находить пересечение и объединение двух множеств, представленных графически на числовой прямой.

• Строить на числовой прямой подмножество числового множества, заданное простейшими условиями.

• Оперировать на базовом уровне понятиями: утверждение, отрицание утверждения, истинные и ложные утверждения, причина, следствие, частный случай общего утверждения, контрпример.

• Распознавать ложные утверждения, ошибки в рассуждениях, в том числе с использованием контрпримеров.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• Использовать числовые множества на координатной прямой для описания реальных процессов и явлений.

• Проводить логические рассуждения в ситуациях повседневной жизни.

Действительные числа и выражения

• Оперировать на базовом уровне понятиями: целое число, рациональное число, действительное число.

• Оперировать на базовом уровне понятиями: обыкновенная дробь, десятичная дробь, приближённое значение числа, часть, доля, отношение, процент, повышение и понижение на заданное число процентов.

• Выполнять арифметические действия с целыми и рациональными числами. Сравнивать рациональные числа между собой. Находить значения числовых выражений и алгебраических выражений при заданных значениях переменных.

• Оперировать на базовом уровне понятиями: корень натуральной степени из числа, степень с рациональным показателем, логарифм числа.

• Изображать точками на числовой прямой целые и рациональные числа, целые степени чисел, корни натуральной степени из чисел, логарифмы чисел в простых случаях.

• Оценивать и сравнивать с рациональными числами значения целых степеней чисел, корней натуральной степени из чисел, логарифмов чисел в простых случаях.

• Оперировать на базовом уровне понятиями тригонометрическая окружность, длина дуги числовой окружности.

• Соотносить длину дуги числовой окружности с мерой соответствующего центрального угла. Переводить градусную меру дуги (угла) в радианную и наоборот.

• Изображать на числовой окружности основные точки, находить декартовы координаты этих точек, соотносить их с синусом и косинусом соответствующего числа. Использовать линию тангенсов для изображения тангенса числа, принадлежащего числовой окружности.

• Оценивать знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса точек числовой окружности.

• Находить тригонометрические значения чисел в табличных случаях.

• Оперировать на базовом уровне понятиями: арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс числа. Уметь вычислять значения аркфункций в табличных случаях.

В повседневной жизни и при изучении других учебных предметов:

• Выполнять вычисления при решении задач практического характера.

• Выполнять практические расчёты с использованием при необходимости справочных материалов и вычислительных устройств.

- Соотносить реальные величины, характеристики объектов окружающей действительности с их конкретными числовыми значениями.
- Использовать методы округления, приближения и прикидки при решении практических задач повседневной жизни.

Функции

- Оперировать на базовом уровне понятиями: зависимость величин, функция, аргумент и значение функции, область определения и область значений функции, график зависимости, график функции, возрастание и убывание функции на числовом промежутке, наибольшее и наименьшее значение функции на числовом промежутке, чётная и нечётная функции, периодическая функция, нули функции, промежутки знакопостоянства.
- Оперировать на базовом уровне понятиями: прямая и обратная пропорциональность, линейная, квадратичная, степенная, логарифмическая и показательная функции, тригонометрические функции.
- Распознавать графики элементарных функций: прямой и обратной пропорциональности, линейной, квадратичной, степенной, логарифмической и показательной функций, тригонометрических функций.
- Соотносить графическое и аналитическое задания элементарных функций.
- Находить по графику приближённо значения функции в заданных точках.
- Описывать по графику свойства функций (читать график).
- Строить графики перечисленных элементарных функций.
- Осуществлять параллельный перенос графиков функций в координатной плоскости.

Элементы математического анализа

- Оперировать на базовом уровне понятиями: производная функции в точке, касательная к графику функции, производная функции.

• Определять значение производной функции в точке по изображению касательной к графику, проведённой в этой точке.

• Понимать эквивалентность понятий: значение производной в точке, угловой коэффициент касательной в точке, тангенс угла наклона касательной в точке, скорость изменения функции в точке.

• Находить уравнение касательной.

• Исследовать функцию на монотонность и экстремумы с помощью производной.

• Находить наименьшее и наибольшее значения функции на заданном отрезке с помощью производной.

• Применять формулы и правила дифференцирования элементарных функций, используя справочные материалы.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• Пользуясь графиками, сравнивать скорости возрастания (роста, повышения, увеличения и т. п.) или скорости убывания (падения, снижения, уменьшения и т. п.) величин в реальных процессах.

• Соотносить графики реальных процессов и зависимостей с их описаниями, включающими характеристики скорости изменения (быстрый рост, плавное понижение и т. п.).

• Использовать графики реальных процессов для решения несложных прикладных задач, в том числе определяя по графику скорость хода процесса.

Уравнения и неравенства

• Выполнять равносильные преобразования при решении уравнений и неравенств.

• Решать линейные, квадратные и дробно-рациональные уравнения и неравенства.

• Решать простейшие тригонометрические уравнения. Решать тригонометрические уравнения методом замены переменной и разложением на множители. Решать однородные тригонометрические уравнения первой и второй степени.

• Решать простейшие показательные и логарифмические уравнения и неравенства. Решать показательные и логарифмические уравнения и неравенства, сводящиеся к квадратным.

• Решать иррациональные уравнения.

• Решать несложные системы уравнений и неравенств.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• Использовать уравнения и неравенства при решении задач на других предметах.

• Уметь оценить и интерпретировать полученный результат.

• Использовать уравнения и неравенства как математические модели для описания реальных ситуаций и зависимостей.

Тождественные преобразования

• Выполнять преобразования целых, дробно-рациональных выражений и несложных выражений, содержащих радикалы.

• Выполнять несложные преобразования логарифмических выражений на основе свойств логарифма.

• Выполнять тождественные преобразования тригонометрических выражений с использованием формул (основного тригонометрического тождества, формул суммы и разности аргументов, двойного аргумента, замены суммы произведением).

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• Выполнять тождественные преобразования при решении задач на других предметах.

Статистика и теория вероятностей, комбинаторика

• Уметь пользоваться основными описательными характеристиками числового набора; понятием генеральная совокупность и выборка из неё, использовать простейшие решающие правила.

• Вычислять вероятности событий на основе подсчёта числа исходов, в том числе с помощью комбинаторики.

• Иметь представление о дискретных и непрерывных случайных величинах и распределениях, о независимости случайных величин.

• Иметь представление о математическом ожидании и дисперсии случайных величин.

• Иметь представление о нормальном распределении и примерах нормально распределённых случайных величин.

• Понимать суть закона больших чисел и выборочного метода измерения вероятностей.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• Оценивать и сравнивать в простых случаях вероятности событий в реальной жизни.

• Читать, сопоставлять, сравнивать, интерпретировать в простых случаях реальные данные, представленные в виде таблиц, диаграмм, графиков.

Текстовые задачи

• Решать несложные текстовые задачи разных типов.

• Анализировать условие задачи. Описывать реальные ситуации с помощью математических моделей.

• Понимать и использовать для решения задачи информацию, представленную в виде текстовой и символьной записи, схем, таблиц, диаграмм, графиков, рисунков.

• Действовать по алгоритму, содержащемуся в условии задачи.

• Использовать логические рассуждения при решении задачи.

• Работать с избыточными условиями, выбирая из всей информации данные, необходимые для решения задачи.

• Осуществлять несложный перебор возможных решений, выбирая из них оптимальное по критериям, сформулированным в условии.

• Анализировать и интерпретировать полученные решения в контексте условия задачи, выбирать решения, не противоречащие контексту.

• Решать задачи на расчёт стоимости покупок, услуг, поездок и т. п.

• Решать несложные задачи, связанные с долевым участием во владении фирмой, предприятием, недвижимостью.

• Решать задачи на простые проценты (системы скидок, комиссии) и на вычисление сложных процентов в различных схемах вкладов, кредитов и ипотек.

• Решать практические задачи, требующие использования отрицательных чисел: на определение температуры, определение положения на временной оси (до нашей эры и после), на движение денежных средств (приход/расход), на определение глубины/высоты и т. п.

• Использовать понятие масштаба для нахождения расстояний и длин на картах, планах местности, планах помещений, выкройках, при работе на компьютере и т. п.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• Решать несложные практические задачи, возникающие в ситуациях повседневной жизни.

Выпускник ***получит возможность научиться*** *в 7–11 классах (для развития мышления, использования в повседневной жизни и обеспечения возможности успешного продолжения образования по специальностям, не связанным с прикладным использованием математики)*:

Элементы теории множеств и математической логики

• Оперировать понятиями: конечное множество, элемент множества, подмножество, пересечение и объединение множеств, числовые множества на координатной прямой, отрезок, интервал, полуинтервал, промежуток с выколотой точкой, графическое представление множеств на координатной плоскости.

• Оперировать понятиями: утверждение, отрицание утверждения, истинные и ложные утверждения, причина, следствие, частный случай общего утверждения, контрпример.

• Проверять принадлежность элемента множеству.

• Находить пересечение и объединение множеств, в том числе представленных графически на числовой прямой и на координатной плоскости.

• Проводить доказательные рассуждения для обоснования истинности утверждений.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• Использовать числовые множества на координатной прямой и на координатной плоскости для описания реальных процессов и явлений.

• Проводить доказательные рассуждения в ситуациях повседневной жизни, при решении задач из других предметов.

Действительные числа и выражения

• Свободно оперировать понятиями: целое число, рациональное число, иррациональное число, действительное число.

• Свободно оперировать понятиями: делимость чисел, обыкновенная дробь, десятичная дробь, приближённое значение числа, часть, доля, отношение, процент, повышение и понижение на заданное число процентов.

• Выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приёмы, применяя при необходимости вычислительные устройства.

• Находить значения числовых и алгебраических выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования.

• Оперировать понятиями: числовая окружность, синус, косинус, тангенс и котангенс числа, расположенного на числовой окружности.

• Соотносить точку числовой окружности с центральным углом. Соотносить тригонометрические значения числового и углового аргументов. Осуществлять переход от градусной меры угла к радианной и наоборот.

• Использовать табличные значения тригонометрических функций при выполнении вычислений и решении уравнений и неравенств.

• Свободно оперировать понятиями: логарифм числа, десятичный и натуральный логарифмы.

• Выполнять вычисления с использованием свойств логарифма.

• Находить значения корня натуральной степени, степени с рациональным показателем, логарифма, используя при необходимости вычислительные устройства.

• Пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчётах.

В повседневной жизни и при изучении других учебных предметов:

• Выполнять действия с числовыми данными при решении задач практического характера и задач из различных областей знаний, используя, при необходимости, справочные материалы и вычислительные устройства.

• Оценивать, сравнивать и использовать при решении практических задач числовые значения реальных величин, конкретные числовые характеристики объектов окружающего мира.

Функции

• Оперировать понятиями: зависимость величин, функция, аргумент и значение функции, область определения и область значений функции, график зависимости, график функции, возрастание и убывание на числовом промежутке, наибольшее и наименьшее значения функции на числовом промежутке, период функции, периодическая функция, чётная и нечётная функции, нули функции, промежутки знакопостоянства.

• Оперировать понятиями: прямая и обратная пропорциональность, линейная, квадратичная, степенная, логарифмическая и показательная функции, тригонометрические функции.

• Определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции.

• Строить графики изученных функций, осуществлять параллельный перенос графиков функций в координатной плоскости.

• Описывать по графику и в простейших случаях по формуле свойства функций, находить по графику функции наибольшие и наименьшие значения.

• Строить эскиз графика функции, удовлетворяющей приведённому набору условий (промежутки возрастания/убывания, значение функции в заданной точке, точки экстремумов, асимптоты, нули функции и т. д.).

• Решать уравнения, простейшие системы уравнений, используя свойства функций и их графиков.

В повседневной жизни и при изучении других учебных предметов:

• Определять по графикам и использовать для решения прикладных задач свойства реальных процессов и зависимостей (наибольшие и наименьшие значения, промежутки возрастания и убывания, промежутки знакопостоянства, асимптоты, точки перегиба, период и т. п.), интерпретировать свойства в контексте конкретной практической ситуации.

• Определять по графикам простейшие характеристики периодических процессов в биологии, экономике, музыке, радиосвязи и т. п. (амплитуда, период и т. п.).

Элементы математического анализа

• Оперировать понятиями: производная функции в точке, касательная к графику функции, производная функции.

• Вычислять производную одночлена, многочлена, квадратного корня, производную суммы функций.

• Вычислять производные элементарных функций и их комбинаций.

• Исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций, строить графики многочленов и простейших рациональных функций с использованием аппарата математического анализа.

В повседневной жизни и при изучении других учебных предметов:

• Решать прикладные задачи по биологии, физике, химии, экономике и другим предметам, связанные с исследованием характеристик реальных процессов, нахождением наибольших и наименьших значений, скорости и ускорения и т. п., интерпретировать полученные результаты.

Уравнения и неравенства

• Решать рациональные, показательные и логарифмические уравнения и неравенства, иррациональные и тригонометрические уравнения и их системы, простейшие тригонометрические и иррациональные неравенства.

• Использовать методы решения уравнений: приведение к виду «произведение равно нулю» или «частное равно нулю», замена переменных.

• Использовать метод интервалов для решения неравенств.

• Использовать графический метод для приближённого решения уравнений и неравенств.

• Изображать на числовой окружности множество решений простейших тригонометрических уравнений и неравенств.

• Выполнять отбор корней уравнений или решений неравенств в соответствии с дополнительными условиями и ограничениями.

В повседневной жизни и при изучении других учебных предметов:

• Составлять и решать уравнения, системы уравнений и неравенства при решении задач других учебных предметов.

• Использовать уравнения и неравенства для построения и исследования простейших математических моделей реальных ситуаций или прикладных задач.

• Уметь интерпретировать полученный при решении уравнения, неравенства или системы результат, оценивать его правдоподобие в контексте заданной реальной ситуации или прикладной задачи.

Тождественные преобразования

• Выполнять тождественные преобразования рациональных и иррациональных выражений.

• Выполнять преобразования логарифмических выражений, используя определение логарифма, основное логарифмическое тождество, свойства логарифмов.

• Выполнять тождественные преобразования тригонометрических выражений с использованием тригонометрических формул.

В повседневной жизни и при изучении других учебных предметов:

Применять тождественные преобразования при решении задач на других предметах.

Статистика и теория вероятностей, комбинаторика

• Иметь представление об условной вероятности и о полной вероятности, применять их в решении задач.

• Иметь представление о важных частных видах распределений и применять их в решении задач.

• Иметь представление о корреляции случайных величин, о линейной регрессии.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• Вычислять или оценивать вероятности событий в реальной жизни;

• Выбирать подходящие методы представления и обработки данных.

• Уметь решать несложные задачи на применение закона больших чисел в социологии, страховании, здравоохранении, обеспечении безопасности населения в чрезвычайных ситуациях.

Текстовые задачи

• Решать задачи разных типов, в том числе задачи повышенной трудности.

• Выбирать оптимальный метод решения задачи, рассматривая различные методы.

• Строить модель решения задачи, проводить доказательные рассуждения.

• Решать задачи, требующие перебора вариантов, проверки условий, выбора оптимального результата.

• Анализировать и интерпретировать результаты в контексте условия задачи, выбирать решения, не противоречащие контексту.

• Переводить при решении задачи информацию из одной формы в другую, используя при необходимости схемы, таблицы, графики, диаграммы.

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• Решать практические задачи и задачи из других предметов.

Тематическое планирование

10 класс

Тема, основное содержание	Кол-во часов
Повторение курса алгебры 7–9	6
Тригонометрические функции	
Что такое числовая окружность. Числовая окружность на координатной плоскости. Дуги на числовой окружности. Синус и косинус. Тангенс и котангенс. Тригонометрические функции числового аргумента. Тригонометрические функции углового аргумента. Функция $y = \sin x$. Функция $y = \cos x$. Функции $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$. Понятие обратной функции. Функция $y = \arcsin x$. Функция $y = \arccos x$. Функции $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$	23
Тригонометрические уравнения	
Решение уравнения $\cos x = a$. Решение уравнения $\sin x = a$. Решение уравнения $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$. Простейшие тригонометрические уравнения. Два основных метода решения тригонометрических уравнений. Однородные тригонометрические уравнения	11
Основные формулы тригонометрии	
Формулы приведения. Синус и косинус суммы и разности аргументов. Тангенс суммы и разности аргументов. Формулы двойного аргумента. Формулы понижения степени. Преобразования сумм тригонометрических функций в произведения	10
Степени и корни. Степенные функции	
Степенные функции с натуральным показателем. Степенные функции с отрицательным целым показателем. Функция $y = \sqrt[n]{x}$, её свойства и график. Свойства корней n-й степени. Понятие степени с любым рациональным показателем. Преобразование иррациональных выражений. Степенные функции, их свойства и графики	13

Окончание

Тема, основное содержание	Кол-во часов
Показательные и логарифмические функции	
Показательная функция, её свойства и график. Число e. Функция $y = e^x$. Показательные уравнения. Показательные неравенства. Понятие логарифма действительного числа. Логарифмическая функция, её свойства и график. Свойства логарифмов. Натуральные логарифмы. Десятичные логарифмы. Логарифмические уравнения. Логарифмические неравенства. *Системы показательных и логарифмических уравнений. Переход к новому основанию логарифма	22
Вероятность, случайные события, случайные величины	
Вероятности случайных событий. Биномиальные коэффициенты. Бином Ньютона. Биномиальное распределение. Схема Бернулли. Дискретные случайные величины и их таблицы распределений. *Числовые характеристики дискретных случайных величин	11
Итоговое повторение	6
Итого:	102

11 класс

Тема, основное содержание	Кол-во часов
Элементы теории пределов	
Числовые последовательности. Понятие предела числовой последовательности. Предел функции на бесконечности. Предел функции в точке. Приращение аргумента. Приращение функции	9
Производная	
Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной. Правила дифференцирования. Уравнение касательной к графику функции. Дифференцирование	19

Окончание

Тема, основное содержание	Кол-во часов
алгебраических функций. Дифференцирование тригонометрических функций. Дифференцирование показательных и логарифмических функций	
Исследование функций с помощью производной	
Применение производной для исследований функций на монотонность. Применение производной для исследований функций на экстремумы. Применение производной для построения графиков функций. Применение производной для нахождения наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции на промежутке. Задачи на нахождение наименьших и наибольших значений величин	16
Первообразная и интеграл	
Что такое первообразная функции. Правила отыскания первообразных. Задачи, приводящие к понятию определённого интеграла. Определённый интеграл. Применение определённого интеграла для вычисления площадей плоских фигур. *Применение определённого интеграла для вычисления объёмов тел вращения	12
Непрерывные распределения вероятностей. Закон больших чисел	
Геометрия и вероятность. Равномерное распределение. Приближения в формуле Бернулли. Нормальное распределение. Случайные величины и закон больших чисел	9
Уравнения, системы уравнений, неравенства	
Равносильные и неравносильные уравнения. Основные методы решения уравнений. Системы уравнений. Решение неравенств с одной переменной. *Неравенства с модулем. *Иррациональные неравенства. Задачи с параметрами. *Текстовые задачи	25
Итоговое повторение	12
Итого:	102

Содержание

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬ

СВЕДЕНИЯ О СЕРТИФИКАТЕ

Сертификат 6033324505102036708305594281468179861

Владелец Широков Александр Николаевич

Действителен С 08.06.2022 по 08.06.2023